Tìm một nghiệm riêng y_* của phương trình vi phân $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_n(x)$ (1),

$p,q,\lambda\in\mathbb{R}, P_n(x)$ là đa thức bậc n.

$y_*=e^{\lambda x}Q(x)$, với $Q(x)$ là đa thức. Tính đạo hàm $y_*'=e^{\lambda x}\left(\lambda Q+Q'\right), y_*''=e^{\lambda x}\left(\lambda^2Q+2\lambda Q'+Q''\right)$.

Thay y_* vào (1) ta được

$$\boxed{\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)Q+\left(2\lambda+p\right)Q'+Q''=P_n(x)}\;(2)$$

Có 3 trường hợp:

TH1: Nếu λ không là nghiệm pt đặc trưng $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$ thì từ (2) ta chọn $Q(x)$ là đa thức bậc n

TH2: Nếu λ là nghiệm đơn pt đặc trưng $\lambda^2+p\lambda+q=0, 2\lambda+p\neq 0$ thì từ (2) $\left(2\lambda+p\right)Q'+Q''=P_n(x)$, ta chọn $Q(x)$ là đa thức bậc $n+1$

TH3: Nếu λ là nghiệm kép pt đặc trưng $\lambda^2+p\lambda+q=0, 2\lambda+p=0$ thì từ (2) $Q''=P_n(x)$, ta chọn $Q(x)$ là nguyên hàm 2 lần của $P_n(x)$

Ví dụ 1: $y''-3y'+2y=x^3e^{4x}$, $p=-3,q=2,\lambda=4$

Pt (2) trở thành $6Q+5Q'+Q''=x^3$

$$Q=ax^3+bx^2+cx+d, Q'=3ax^2+2bx+c, Q''=6ax+2b$$

$$6Q+5Q'+Q''=x^3\Leftrightarrow 6\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)+5\left(3ax^2+2bx+c\right)+6ax+2b=x^3$$

$$6\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)+5\left(3ax^2+2bx+c\right)+6ax+2b=x^3$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6a=1\\6b+15a=0\\6c+10b+6a=0\\6d+5c+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{1}{6}, b=\frac{-5}{12}, c=\frac{19}{36}, d=-\frac{65}{216}\Rightarrow y_*=\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{12}x^2+\frac{19}{36}x-\frac{65}{216}\right)e^{4x}$$

$$y=\overline{y}+y_*$$

Ví dụ 2: $y''-3y'+2y=x^3e^x$, $p=-3,q=2,\lambda=1$

Pt (2) trở thành $-Q'+Q''=x^3$

$Q=ax^4+bx^3+cx^2+dx, Q'=4ax^3+3bx^2+2cx+d, Q''=12ax^2+6bx+2c$ (đa thức Q không cần cộng hằng số nữa vì đã có e^x là nghiệm của pt thuần nhất)

$$-\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)+12ax^2+6bx+2c=x^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4a=1\\-3b+12a=0\\-2c+6b=0\\-d+2c=0\end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}, b=-1, c=-3, d=-6 \Rightarrow y_*=\left(-\frac{1}{4}x^4-x^3-3x^2-6x\right)e^x$$

$$y=\overline{y}+y_*$$

Ví dụ 3: $y''-2y'+y=x^3e^x$, $p=-2,q=1,\lambda=1$

Pt (2) trở thành $Q''=x^3 \Rightarrow$ chọn $Q=\dfrac{x^5}{20} \Rightarrow y_*=\dfrac{1}{20}x^5e^x$.

$$y=\overline{y}+y_*$$

Đoàn Công Định