MI1133 **GIẢI TÍCH III**

Phiên bản: 2020.1.0

Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về chuỗi , phương trình vi phân và phương pháp toán tử Laplace. Trên cơ sở đó, sinh viên có thể học tiếp các học phần sau về toán cũng như các môn kỹ thuật khác, góp phần tạo nên nền tảng toán học cơ bản cho kỹ sư các ngành công nghệ.

Objective: *To provide the knowledge and calculation skills on infinite series and basic differential equations, one-sided Laplace transform, to formulate Mathematical foundations for students of technology majors, providing mathematical tools for students.*

Nội dung: Chuỗi số, chuỗi hàm, chuỗi lũy thừa, chuỗi Fourier, phương trình vi phân cấp I, phương trình vi phân cấp II, hệ phương trình vi phân cấp I, phương pháp toán tử Laplace và vận dụng vào việc giải các phương trình vi phân cấp cao và hệ phương trình vi phân. Giới thiệu một số mô hình toán.

Contents: *Infinite numerical series, series of functions, Fourier series, first-order differential equations, Second-order linear differential equations, first-order systems of differential equations, Laplace transforms, some models and modelling of technical problems.*

1. THÔNG TIN CHUNG

Tên học phần:	Giải tích III
Mã số học phần:	MI1133
Khối lượng:	3(2-2-0-6) - Lý thuyết: 30 tiết - Bài tập: 30 tiết
Học phần tiên quyết:	
Học phần học trước:	- MI1110/MI1010 Giải tích I
Học phần song hành:	- Giải tích II

2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Môn học này nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về chuỗi, phương trình vi phân và phương pháp toán tử Laplace.

3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U)
[1]	[2]	[3]
M1	**Nắm vững được các kiến thức cơ bản của về chuỗi, phương trình vi phân và phương pháp toán tử Laplace**	
M1.1	Nắm vững các khái niệm cơ bản.	IT
M1.2	Có khả năng vận dụng kiến thức đã học để giải các bài tập liên quan tới nội dung môn học.	TU
M2	**Có thái độ làm việc nghiêm túc cùng kỹ năng cần thiết để làm việc có hiệu quả**	

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U)
M2.1	Có kỹ năng: phân tích và giải quyết vấn đề bằng tư duy, logic chặt chẽ; làm việc độc lập, tập trung.	TU
M2.2	Nhận diện một số vấn đề thực tế có thể sử dụng công cụ của chuỗi, phương trình vi phân và phương pháp toán tử Laplace để giải quyết.	ITU
M2.3	Thái độ làm việc nghiêm túc, chủ động sáng tạo, thích nghi với môi trường làm việc có tính cạnh tranh cao.	IT

4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

Giáo trình

[1] Nguyễn Đình Trí, Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2015). Bài tập *Toán học cao cấp tập 3: Chuỗi và phương trình vi phân.* NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Đình Trí, Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2017). Bài tập *Toán học cao cấp tập 3: Chuỗi và phương trình vi phân.* NXB Giáo dục.

[3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2000). *Bài tập Toán học cao cấp tập II.* NXB Giáo dục.

[4] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (1999). *Bài tập Toán học cao cấp tập III.* NXB Giáo dục.

Sách tham khảo

[1] Trần Bình (2005). *Giải tích II và III*, NXB KH và KT.

[2] Lê Ngọc Lăng, Nguyễn Chí Bảo, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Phú Trường. *Ôn thi học kỳ và thi vào giai đoạn II.* NXB Giáo dục.

[3] Lê Ngọc Lăng, Tống Đình Quỳ, Nguyễn Đăng Tuấn, Mai Văn Dược (1998). *Giúp ôn tập tốt môn Toán cao cấp*. NXBKH.

[4] Đinh Bạt Thẩm, Nguyễn Phú Trường (1993) . *Bài tập Toán học cao cấp tập II.* NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Xuân Thảo (2010). *Bài giảng Phương pháp Toán tử Laplace.*

[6] Nguyễn Thiệu Huy: Infinite series and differential equations.
download: http://sami.hust.edu.vn/tai-lieu/

5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
A1. Điểm quá trình (*)	**Đánh giá quá trình**			**30%**
	A1.1. Bài tập trên lớp và bài tập về nhà	Tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	
	A1.2. Thi giữa kỳ	Tự luận		

A2. Điểm cuối kỳ	**A2.1. Thi cuối kỳ**	Tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	**70%**

** Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ –2 đến +2, theo qui định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.*

6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	**Nội dung**	**CĐR học phần**	**Hoạt động dạy và học**	**Bài đánh giá**
[1]	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**
1	**Chương 1. Chuỗi (11LT+ 11BT)** **1.1** Đại cương về chuỗi số - Các khái niệm: Chuỗi số, số hạng tổng quát, tổng riêng, phần dư, chuỗi hội tụ, phân kỳ, tổng của chuỗi hội tụ. Chú ý: Phải có ví dụ chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n$. - Điều kiện ắt có để chuỗi hội tụ (có chứng minh). Chú ý: Phải có ví dụ chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. - Các tính chất cơ bản của chuỗi số hội tụ (học sinh tự đọc chứng minh) **1.2** Chuỗi số dương - Định nghĩa chuỗi số dương - Các định lý so sánh 1 và 2 (chứng minh định lý 1, học sinh tự đọc chứng minh định lý 2) - Các tiêu chuẩn hội tụ (tiêu chuẩn D'Alambert, Cauchy, tích phân) (Chứng minh tiêu chuẩn D'Alambert, học sinh tự đọc chứng minh 2 tiêu chuẩn còn lại). Chú ý: Phải có ví dụ chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.	M1,M2	Giảng bài	A1,A2
2	**1.3** Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ - Chuỗi có dấu bất kỳ: các khái niệm hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ. Định lý về chuỗi số hội tụ tuyệt đối (học sinh tự đọc chứng minh) - Chuỗi số đan dấu: định nghĩa, định lý Leibniz (có chứng minh)	M1,M2		A1,A2
3	**1.4** Chuỗi hàm - Định nghĩa chuỗi hàm, miền hội tụ của chuỗi hàm (hội tụ điểm), tổng của chuỗi hàm	M1, M2		A1,A2

	- Sự hội tụ đều của chuỗi hàm: định nghĩa, tiêu chuẩn Cauchy, tiêu chuẩn Weierstrass (không chứng minh) - Các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều: tổng là hàm liên tục, tích phân, đạo hàm dưới tổng (học sinh tự đọc chứng minh hai tính chất cuối)			
4	**1.5** Chuỗi luỹ thừa - Định nghĩa chuỗi luỹ thừa: định lý Abel (có chứng minh), khoảng và miền hội tụ - Các tính chất của chuỗi luỹ thừa: chuỗi hội tụ đều, tổng là hàm liên tục, tích phân và đạo hàm dưới tổng (học sinh tự đọc chứng minh). Phần áp dụng để tính tổng một số chuỗi (chỉ nêu một ví dụ, học sinh tự đọc) - Khai triển hàm thành chuỗi luỹ thừa (Chuỗi Taylor, Maclaurin). Các định lý để hàm khai triển được (không chứng minh)	M1, M2		A1,A2
5	- Các khai triển của một số hàm số sơ cấp cơ bản. Áp dụng để tính gần đúng giá trị của hàm, tính gần đúng tích phân xác định (học sinh tự đọc) **1.6** Chuỗi Fourier - Chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier - Điều kiện để một hàm khai triển được thành chuỗi Fourier. Định lý Dirichlet (không chứng minh)	M1, M2		A1,A2
6	- Khai triển Fourier hàm chẵn, hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ 2π. - Khai triển Fourier hàm tuần hoàn chu kỳ 2π. **Chương 2. Phương trình vi phân (11LT+ 12 BT)** **2.1** Khái niệm mở đầu - Định nghĩa phương trình vi phân (PTVT), cấp của phương trình, nghiệm của phương trình (PT) **2.2** Phương trình vi phân cấp 1 - Đại cương về PTVP cấp 1: dạng tổng quát của PT, định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm (không chứng minh), bài toán Cauchy, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng. Giới thiệu một vài ứng dụng thực tế của PTVP cấp 1.	M1, M2		A1,A2
7	- Các PT khuyết y, khuyết x - PT biến số phân ly - PT thuần nhất (đẳng cấp) - PT tuyến tính - PT Bernoulli - PTVP toàn phần	M1, M2		A1,A2
8	**2.3** Phương trình vi phân cấp 2	M1, M2		A2

	- Đại cương về PTVP cấp 2: Dạng tổng quát, định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm, bài toán Cauchy, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng. Giới thiệu một vài ứng dụng thực tế của PTVP cấp 2. - Các PT khuyết y và y', khuyết y, khuyết x - PT tuyến tính dạng: $y''+p(x)y'+q(x)=f(x)$ PT thuần nhất: Các định lý về cấu trúc nghiệm của PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất (chứng minh định lý để dẫn đến công thức $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$			
9	**THI GIỮA KỲ :** TỪ CHƯƠNG 1 ĐẾN HẾT MỤC 2.2 CHƯƠNG 2			
10	- PT không thuần nhất: Định lý về nghiệm tổng quát (học sinh tự đọc chứng minh). Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Nguyên lý chồng chất nghiệm - PTVP tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi: PT thuần nhất	M1, M2		A2
11	- PT không thuần nhất với vế phải f(x) có dạng: $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$	M1, M2		A2
12	- PT *Euler* (giáo viên hướng dẫn thông qua một số ví dụ) **2.4** Hệ phương trình vi phân cấp 1 - Định nghĩa dạng tổng quát, nghiệm, đưa PTVP cấp cao về hệ chuẩn tắc và ngược lại. Định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm. Phương pháp khử (thể hiện qua một ví dụ giải hệ gồm 2 phương trình có hệ số không đổi dạng đơn giản) (giáo viên hướng dẫn học sinh tự đọc và làm bài tập).	M1, M2		A2
13	**Chương 3. Phương pháp toán tử Laplace (8LT+ 7BT)** **3.1** Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược - Phép biến đổi Laplace (PBĐ), tính chất tuyến tính, bảng PBĐ Laplace của một số hàm, hàm số liên tục từng khúc, sự tồn tại của PBĐ Laplace. Ví dụ. - PBĐ Laplace nghịch đảo, sự duy nhất của PBĐ Laplace nghịch đảo. Ví dụ.	M1, M2		A2
14	**3.2** Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu - PBĐ của đạo hàm, nghiệm của bài toán giá trị ban đầu, Ví dụ giải PTVP tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số - Hệ PTVP tuyến tính cấp hai, giới thiệu mô hình toán - PBĐ của tích phân	M1, M2		A2

15	**3.3** Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản - Phân thức đơn giản tuyến tính, phân thức đơn giản bậc 2, biến đổi trên trục s. - Giải PTVP tuyến tính cấp cao (lớn hơn hay bằng 3) với hệ số hằng số	M1, M2		A2
16	**3.4** Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi - Tích chập của hai hàm, PBĐ Laplace của tích chập - Vi phân của PBĐ - Tích phân của PBĐ	M1, M2		A2

7. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

8. NGÀY PHÊ DUYỆT: 15/7/2020

Viện Toán ứng dụng và Tin học

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy

BÀI TẬP THAM KHẢO MÔN GIẢI TÍCH III

Nhóm ngành 3 **Mã học phần: MI 1133**

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3, Tự luận, 60 phút.
   Nội dung: Đến hết phương trình vi phân cấp một.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7, Tự luận, 90 phút.

Chương 1

Chuỗi

1.1 Chuỗi số

Bài 1. Xét sự hội tụ và tính tổng nếu có của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{n+1}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Bài 2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{4n+5}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{e}-1)$

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\ln n}$

f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$

m) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

n) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

o) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

Bài 3. Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\frac{\pi n^2}{n+1}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+100}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

k) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}$

Bài 4. Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, liệu có thể suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ cũng hội tụ? Vẫn câu hỏi này, nếu thêm giả thiết chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

1.2 Chuỗi hàm số

Bài 5. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n+1}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^x+(-1)^n}{n}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x+\frac{1}{n}\right)^n$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n+\frac{1}{2^n x^n}\right)$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$

Bài 6. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số trên tập đã cho:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, $|x| < q < 1$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x^2+1)^n}$, $x \in \mathbb{R}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$, $x \in [-1;1]$

Bài 7. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{n^2+1}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n x^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin n)x^n$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\tan^n x$

Bài 8. Tính tổng của các chuỗi sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n,\ x \in (-1;1)$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)3^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)},\ x \in (-1;1)$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3},\ x \in (-1;1)$

Bài 9. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Maclaurin

a) $y = \dfrac{2x+4}{x^2-3x+2}$

b) $y = x\sin^2 x$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

e) $y = \ln(1+x-2x^2)$

f) $y = \arcsin x$

Bài 10. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Taylor (trong lân cận điểm x_0 tương ứng):

a) $y = \dfrac{1}{2x+3},\ x_0 = 4$

b) $y = \sin\dfrac{\pi x}{3},\ x_0 = 1$

c) $y = \sqrt{x},\ x_0 = 4$

Bài 11. Khai triển các hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$ sau thành chuỗi Fourier

a) $y = x,\ x \in (-\pi, \pi)$

b) $y = |x|,\ x \in (-\pi, \pi)$

Bài 12. Khai triển các hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2$ sau thành chuỗi Fourier

a) $f(x) = x, x \in (-1, 1)$

b) $f(x) = |x|, x \in (-1, 1)$

Bài 13. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Fourier

a) $f(x) = \begin{cases} A & \text{nếu } 0 < x < l \\ 0 & \text{nếu } l < x < 2l \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{nếu } -\pi < x < 0 \\ bx & \text{nếu } 0 < x < \pi \end{cases}$

c) $f(x) = 10 - x,\ x \in (5; 15)$

Chương 2

Phương trình vi phân

2.1 Phương trình vi phân cấp một

Bài 14. Giải các phương trình vi phân cấp một sau.

1) Các phương trình khuyết:

a) $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1), y(0) = 2$

b) $y' + y = 1$

c) $x = (y')^2 - y' + 2$

d) $y^2 + (y')^2 = 4$

2) Các phương trình phân ly:

a) $y' = x^2 y$

b) $2y(x^2 + 4)dy = (y^2 + 1)dx$

c) $y' + e^{y+x} = 0$

d) $1 + x + xy'y = 0$

3) Các phương trình thuần nhất:

a) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$

b) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$

c) $2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -1$

d) $(x + 2y)dx - xdy = 0$

4) Các phương trình tuyến tính:

a) $y' - \frac{4}{x}y = 4x^7$

b) $xy' + y = \sqrt{x}$

c) $y' = x - y$

d) $(2xy + 3)dy - y^2 dx = 0$

5) Các phương trình Bernoulli:

a) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4, y(1) = 2$

b) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$

c) $xy' + y = -xy^2$

d) $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$

6) Các phương trình vi phân toàn phần:

a) $(x^2 + y)dx = (2y - x)dy$

b) $(2xy + 3)dy = -y^2 dx$

c) $e^y dx = (xe^y - 2y)dy$

d) $(x^2y^2 - x)dy = ydx$

7) Các phương trình cần đổi biến và/hoặc nhận dạng:

a) $y' = (x+y)^2$

b) $y' = 1 + x + y + xy$

c) $y' = \dfrac{x+y-2}{x-y+4}$

d) $(x^2+1)y' + xy = 1$

e) $3xy^2y' - y^3 = x, y(1) = 3$

f) $(2xy^2 - 3y^3)dx = (3xy^2 - y)dy$

g) $y = xy' + y' - y'\ln(y')$

h) $xy' = y + x^3 \sin x, y(\pi) = 0$

2.2 Phương trình vi phân cấp hai

Giải các phương trình vi phân cấp hai sau.

Bài 15. Các phương trình khuyết:

a) $xy'' + 2y' = 12x^2$

b) $\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' = 2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

c) $2yy' = (y')^2 + 1$

d) $\begin{cases} (1+x)y'' + x(y')^2 = y', \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$

Bài 16. Các phương trình tuyến tính hệ số hằng:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) $y'' - 2y' + y = 0$

c) $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

d) $y'' - 4y' + 3y = (15x + 37)e^{-2x}$

e) $y'' - y = 4(x+1)e^x$

f) $y'' - 2y' + y = (12x + 4)e^x$

g) $y'' + y = 2\cos x \cos 2x$

h) $y'' + 2y' + 2y = 8\cos x - \sin x$

i) $y'' + y' - 2y = x + \sin 2x$

j) $y'' + 3y' - 4y = 200\sin^2 x$

k) $y'' - y' - 2y = xe^x \cos x$

l) $y'' + 2y' + 10y = x^2e^{-x}\cos 3x$

m) $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin x$

n) $y'' + 4y = e^{3x} + x\sin 2x$

Bài 17. Phương pháp biến thiên hằng số:

a) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

b) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

Bài 18. Các phương trình tuyến tính có hệ số hàm số:

a) $(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$ biết nó có hai nghiệm riêng $y_1 = 1, y_2 = x$

b) $y'' - \dfrac{2xy'}{x^2+1} + \dfrac{2y}{x^2+1} = 0$ biết nó có một nghiệm riêng $y_1 = x$

c) $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

d) $\dfrac{y''}{(y')^3} + \dfrac{2}{y'} - x + y = e^y \cos y$ (Gợi ý: coi $x = x(y)$)

2.3 Hệ phương trình vi phân cấp một

Bài 19. Giải các hệ phương trình vi phân sau

a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 5z \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x-y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{x-y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 5z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$

2.4 Ứng dụng chuỗi hàm số giải phương trình vi phân

Bài 20. Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp khai triển chuỗi

a) $y'' + y = 0$

b) $y'' - 2xy' + y = 0$

Chương 3

Phương pháp toán tử Laplace

3.1 Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược

Bài 21. Sử dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) $f(t) = t$ b) $f(t) = e^{3t+1}$ c) $f(t) = \sinh kt$ d) $f(t) = \sin^2 t$

Bài 22. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) $f(t) = \sqrt{t} + 3t$

b) $f(t) = t - 2e^{3t}$

c) $f(t) = 1 + \cosh(5t)$

d) $f(t) = \cos^2(2t)$

e) $f(t) = (t+1)^3$

f) $f(t) = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

g) $f(t) = 2\sin 3t \cos 5t$

h) $f(t) = \sinh^2(3t)$

Bài 23. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

a) $F(s) = \dfrac{3}{s^4}$

b) $F(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^{\frac{5}{2}}}$

c) $F(s) = \dfrac{3}{s-4}$

d) $F(s) = \dfrac{5-3s}{s^2+9}$

e) $F(s) = \dfrac{10s-3}{25-s^2}$

3.2 Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu

Bài 24. Giải các bài toán giá trị ban đầu

a) $\begin{cases} x^{(3)} - x'' - x' + x = e^{2t} \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^{(3)} - 6x'' + 11x' - 6x = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^{(4)} - 16x = 240\cos t \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)} = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0 \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x^{(3)}(0) = 1 \end{cases}$

Bài 25. Giải các bài toán giá trị ban đầu

a) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 6x + 3y \\ x(0) = 2, y(0) = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' + 2y' + x = 0 \\ x' - y' + y = 0 \\ x(0) = 1, y(0) = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x'' + x' + y' + 2x - y = 0 \\ y'' + x' + y' + 4x - 2y = 0 \\ x(0) = y(0) = 1, \\ x'(0) = y'(0) = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'' + 2x - 4y = 0 \\ y'' - x + 2y = 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \\ x'(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$

3.3 Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

Bài 26. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) $f(t) = t^4 e^{\pi t}$ b) $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$ c) $f(t) = e^t \sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Bài 27. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 - 3s}$

b) $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$

c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$

e) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

f) $F(s) = \dfrac{3}{2s - 4}$

g) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 4s + 4}$

h) $F(s) = \dfrac{3s + 5}{s^2 - 6s + 25}$

i) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 - 4}$

j) $F(s) = \dfrac{5 - 2s}{s^2 + 7s + 10}$

k) $F(s) = \dfrac{1}{s^3 - 5s^2}$

l) $F(s) = \dfrac{1}{s^3 - 1}$

m) $F(s) = \dfrac{1}{s^4 - 16}$

n) $F(s) = \dfrac{s^2 - 2s}{s^4 + 5s^2 + 4}$

o) $F(s) = \dfrac{s^2 + 3}{(s^2 + 2s + 2)^2}$

3.4 Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

Bài 28. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) $f(t) = t\cos^2 t$

b) $f(t) = t^2 \sin kt$

c) $f(t) = te^{2t}\sin 3t$

d) $f(t) = (t - e^{2t})^2$

e) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

f) $f(t) = \dfrac{e^{2t-1}}{t}$

g) $f(t) = \dfrac{\sinh t}{t}$

h) $f(t) = \dfrac{\cosh t}{t}$

i) $f(t) = \dfrac{1 - \cos 2t}{t}$

j) $f(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$

Bài 29. Tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm sau

a) $F(s) = \arctan \dfrac{1}{s}$

b) $F(s) = \ln \dfrac{s^2+1}{s^2+4}$

c) $F(s) = \ln \dfrac{s-2}{s+2}$

d) $F(s) = \ln \dfrac{s^2+1}{(s+2)(s-3)}$

e) $F(s) = \ln \left(1 + \dfrac{1}{s^2}\right)$

f) $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s}$

Bài 30. Giải các bài toán giá trị ban đầu:

a) $\begin{cases} tx'' + (t-2)x' + x = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} tx'' - (4t+1)x' + 2(2t+1)x = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} tx'' + (4t-2)x' + (13t-4)x = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} ty'' - ty' + y = 2 \\ y(0) = 2, y'(0) = -4 \end{cases}$

Bài 31. Giải các bài toán giá trị ban đầu:

a) $\begin{cases} x'' + x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ ở đó $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'' + 4x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ ở đó $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

c) $\begin{cases} x'' + 4x' + 4x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ ở đó $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'' + 4x' + 5x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ ở đó $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$

Viện Toán ứng dụng và Tin học

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI ★ VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy