

ĐỀ CƯƠNG BÀI TẬP GIẢI TÍCH I - TỪ K62

Nhóm ngành 3

Mã số : MI 1113

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3: Tự luận, 60 phút.

Nội dung: Chương 1, chương 2 đến hết tích phân bất định của các hàm phân thức hữu tỉ.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7: Tự luận, 90 phút.

Chương 1**Phép tính vi phân hàm một biến số****1.1-1.4. Dãy số, hàm số**

1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{\operatorname{arccot} x - 5\pi}$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

b) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

d) $y = \arccos(\sin x)$.

2. Tìm miền giá trị của hàm số

a) $y = \lg(1 - 2 \cos x)$

c) $y = \arctan(\sin x)$

b) $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$

d) $y = \arctan(e^x)$.

3. Biểu tính thuế thu nhập cá nhân được xác định như sau. Dưới 5 triệu, không phải chịu thuế. Từ 5 triệu đến dưới 10 triệu, chịu thuế 5%, từ 10 triệu đến dưới 20 triệu, 10%, từ 20 triệu đến dưới 30 triệu, 15%, từ 30 triệu đến dưới 50 triệu, 20%, từ 50 triệu đến dưới 80 triệu, 25%. Từ 80 triệu, 30%. Tìm hàm biểu diễn tiền thuế phải nộp theo mức thu nhập.

4. Tìm $f(x)$ biết

$$\text{a) } f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \qquad \text{b) } f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2.$$

5. Tìm hàm ngược của hàm số

$$\text{a) } y = 2 \arcsin x \qquad \text{b) } y = \frac{1-x}{1+x} \qquad \text{c) } y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

6. Tìm giới hạn của những dãy số (nếu hội tụ) với số hạng tổng quát x_n như sau

$$\begin{aligned} \text{a) } x_n &= n - \sqrt{n^2 - n} & \text{d) } x_n &= \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}} \\ \text{b) } x_n &= n \cos n\pi & \text{e) } x_n &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} \\ \text{c) } x_n &= \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} & \text{f) } x_n &= \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1} \\ \text{g) } x_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \end{aligned}$$

7. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy với số hạng tổng quát x_n như sau

$$\begin{aligned} \text{a) } x_n &= \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}} \quad (n \text{ dấu căn}) \\ \text{b) } x_n &= \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots + \frac{1}{2}}} \quad (n \text{ phép chia}) \\ \text{c) } x_n &= \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right) \quad (x_0 = 1) \end{aligned}$$

1.5-1.6. Giới hạn hàm số

8. Tìm giới hạn

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sqrt{1+x} - \frac{1}{x} \right) & \qquad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} & \qquad \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right) \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x \right) & \qquad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{\ln(1+3x)} \end{aligned}$$

9. Tìm giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \arccos^3 x) - \ln x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$.

10. Tìm giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4 \sin x)}{3^x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2) \ln(x+2) - 2(x+1) \ln(x+1) + x \ln x].$

11. So sánh các cặp VCB sau:

a) $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ và $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$, khi $x \rightarrow 0^+$.

b) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$ và $\beta(x) = \cos x - 1$, khi $x \rightarrow 0^+$.

c) $\alpha(x) = x^3 + \sin^2 x$ và $\beta(x) = 1 - \cos x$, khi $x \rightarrow 0$.

1.7. Hàm số liên tục

12. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

13. Hàm $f(x)$ sau liên tục tại những giá trị x nào?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ,} \\ 1, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ,} \\ x, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases}$$

14. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

$$\text{a) } y = \frac{8}{1 - 2^{\cot x}}$$

$$\text{c) } y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{x} \arcsin x$$

$$\text{d) } y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, (a \neq b)$$

15. Các hàm số sau đây có liên tục đều trên miền đã cho không?

$$\text{a) } y = \frac{x}{4-x^2}; -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{b) } y = \ln x; 0 < x < 1$$

1.8. Đạo hàm và vi phân

$$16. \text{ Tìm đạo hàm của hàm số } f(x), \text{ biết } f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{nếu } x < 1, \\ (1 - x)(2 - x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

17. Tính $f'(x)$ biết $f'(2017x) = x^2$.

18. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

a) Liên tục tại $x = 0$

c) Có đạo hàm liên tục tại $x = 0$.

b) Khả vi tại $x = 0$

19. Trong năm 2016, GDP (tổng thu nhập quốc dân) của Việt Nam theo đầu người là 6.421 USD, dân số (ước tính) 95.414.640, tốc độ tăng trưởng GDP 6,2%, tốc độ tăng dân số 1,1%. Xác định GDP và tốc độ tăng trưởng

GDP của Việt Nam trong năm 2016.

20. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

21. Tìm vi phân của hàm số

a) $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

c) $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|, (a \neq 0)$

b) $y = \arcsin \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

d) $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$

22. Tìm

a) $\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$

b) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

c) $\frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9).$

23. Cho hàm số $f(x)$, biết rằng đường tiếp tuyến với đồ thị của $f(x)$ tại điểm $(4,3)$ đi qua điểm $(0,2)$, tính $f(4)$ và $f'(4)$.

24. Nếu $C(x)$ là chi phí sản xuất của x đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là $C'(x)$ cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm

$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3.$$

Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại $x = 100$, giá trị đó nói lên điều gì?

25. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a) $y = \frac{x^2}{1 - x}$, tính $y^{(8)}$

c) $y = \frac{x^2}{1 - x}$, tính $y^{(8)}$

b) $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$, tính $y^{(100)}$

d) $y = x^2 \sin x$, tính $y^{(50)}$.

26. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{x}{x^2 - 1} & \text{c) } y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} & \text{e) } y = \sin^4 x + \cos^4 x \\ \text{b) } y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} & \text{d) } y = e^{ax} \sin(bx + c). & \text{f) } y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

27. Tính vi phân cấp cao của các hàm số

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = (2x + 1) \sin x. \text{ Tính } d^{10}y(0). & \text{c) } y = x^9 \ln x. \text{ Tính } d^{10}y(1). \\ \text{b) } y = e^x \cos x. \text{ Tính } d^{20}y(0) & \text{d) } y = x^2 e^{ax}. \text{ Tính } d^{20}y(0) \end{array}$$

28. Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ P được mô tả bởi phương trình:

$$P'(t) = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c} \right) P(t) - \beta P(t)$$

với r_0 là tỉ lệ sinh sản, P_c là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì, β là tỉ lệ khai thác. Cho $P_c = 10000$, tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

29. Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

30. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

31. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $-1 \leq x \leq 1$.

32. Chứng minh bất đẳng thức

$$\text{a) } |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

b) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a$

c) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}, 0 < a < b.$

33. Tồn tại hay không hàm f sao cho $f(0) = -1, f(2) = 4$ và $f'(x) \leq 2$ với mọi x ?

34. Tìm giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}.$

35. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

36. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b) . Chứng minh rằng với mọi $x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c).$$

37. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a) $y = x^4 + x^2 - x + 1$ b) $y = \arctan x - x$ c) $y = x + |\sin 2x|$

38. Chứng minh bất đẳng thức

a) $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

b) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$.

39. Tìm cực trị của hàm số

a) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

c) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

b) $y = x - \ln(1+x)$

d) $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

40. Một nhà bán lẻ bán 1200 TV một tuần ở mức giá 35 triệu. Một nghiên cứu thị trường chỉ ra, cứ giảm giá 1 triệu thì lượng bán sẽ tăng lên 80 chiếc một tuần. Giá thành sản xuất trong tuần là x chiếc TV là: $C(x) = 350 + 12x$ (triệu).

a) Tìm hàm đơn giá và hàm doanh thu (theo lượng bán).

b) Cửa hàng nên bán ở mức giá bao nhiêu để cực đại doanh thu?

c) Tìm giá bán để cực đại lợi nhuận.

41. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, chứng minh rằng $\forall c \in (a, b)$, ta có:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

42. Cho $x, y > 0$, chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}}$

b) $x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$

1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

43. Tìm tiệm cận của các đường cong sau

a) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

c) $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$

b) $y = \ln(1 + e^{-x})$

$$d) \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = \frac{2016t^2}{1 - t^3} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \arctan t \end{cases}$$

44. Khảo sát hàm số

$$a) y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$$

$$b) y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$c) y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$$

$$d) y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$e) \begin{cases} x = \frac{2t}{1 - t^2} \\ y = \frac{t^2}{1 + t} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$$

$$g) r = a + b \cos \varphi, (0 < a \leq b)$$

$$h) r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, (a > 0).$$

Chương 2

Phép tính tích phân hàm một biến số

2.1 Tích phân bất định

1. Tính các tích phân

a) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$

e) $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+5)}$

b) $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

f) $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

g) $\int \sin x \sin(x+y) dx$

d) $\int \frac{x dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

h) $\int \frac{1 + \sin x}{\sin^2 x} dx.$

2. Tính các tích phân

a) $\int \arctan x dx$

e) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$

b) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx$

f) $\int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx$

c) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

g) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

d) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2} dx$

h) $\int \arcsin^2 x dx.$

3. Lập công thức truy hồi tính I_n

a) $I_n = \int x^n e^x dx$

b) $I_n = \int \sin^n x dx$

c) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}.$

2.2. Tích phân xác định

4. Tính các đạo hàm

a) $\frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt$

b) $\frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt$

c) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$

5. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$

6. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

7. Tính các tích phân sau

a) $\int_{1/e}^e |\ln x| (x+1) dx$ c) $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$ e) $\int_0^{\pi/4} \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$
 b) $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$ d) $\int_0^3 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx$ f) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx.$

8. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$ b) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx.$

Áp dụng tính các tích phân sau

c) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$ d) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}}$ e) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$

9. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Giả sử, $f^2(x), g^2(x)$ và $f(x).g(x)$ khả tích trên $[a, b]$, chứng minh bất đẳng thức (với $a < b$):

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

2.3. Tích phân suy rộng

10. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

a) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

b) $\int_0^{+\infty} \cos x dx$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

11. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$

c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

12. Nếu $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ thì có suy ra được $f(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$ không?

Xét ví dụ $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

13. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$. Hỏi

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ có hội tụ không.

2.4. Ứng dụng của tích phân xác định

14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Đường parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

b) Parabol bậc ba $y = x^3$ và các đường $y = x, y = 2x, (x \geq 0)$

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và parabol $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

d) Đường $y^2 = x^2 - x^4$.

15. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2, (a > 0)$.

16. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt paraboloid $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ $x = 0, z = 0$ và mặt phẳng $x = a$ ($a \neq 0$).

17. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$

- a) Quay quanh trục Ox một vòng b) Quay quanh trục Oy một vòng.

18. Tính độ dài đường cong

a) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ khi x biến thiên từ 1 đến 2.

b) $\begin{cases} x = a \left(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \\ y = a \sin t \end{cases}$ khi t biến thiên từ $\frac{\pi}{3}$ đến $\frac{\pi}{2}$ ($a > 0$).

19. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ quay quanh trục Ox

b) $y = \frac{1}{3}(1 - x)^3, 0 \leq x \leq 1$ quay quanh trục Ox .

Chương 3 Hàm số nhiều biến số

3.1. Các khái niệm cơ bản

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

$$\text{a) } z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} \qquad \text{c) } z = \arcsin \frac{y-1}{x}$$

$$\text{b) } z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)} \qquad \text{d) } z = \sqrt{x \sin y}$$

2. Tìm tập giá trị của hàm số

$$\text{a) } z = 1 - 2x^2 - 3y^2 \qquad \text{c) } u = \arcsin x + \arccos y + \arctan z$$

$$\text{b) } z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \qquad \text{d) } z = \operatorname{arccot}(x^2 + y^2 + z^2)$$

3. Tìm các giới hạn nếu có của các hàm số sau

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{d) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

$$\text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \qquad \text{e) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + 4y^3)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$$

$$\text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \qquad \text{f) } \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$$

3.2. Đạo hàm riêng và vi phân

4. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

$$\text{a) } z = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \qquad \text{d) } z = x^{y^3}, (x > 0)$$

$$\text{b) } z = y^2 \sin \frac{x}{y} \qquad \text{e) } u = x^{y^z}, (x, y, z > 0)$$

$$\text{c) } z = \arctan \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} \qquad \text{f) } u = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{g) } u = x^{\frac{y}{z}}.$$

5. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y)$ sau

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} x \arctan \left(\frac{y}{x} \right)^2, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

6. Giả sử $z = yf(x^2 - y^2)$, ở đây f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x} z_x' + \frac{1}{y} z_y' = \frac{z}{y^2}$$

7. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau đây

$$\text{a) } z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{b) } z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y}$$

$$\text{c) } z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3.$$

8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

$$\text{a) } z = \sin(x^2 + y^2)$$

$$\text{c) } z = e^{x^2} \sin^2 y$$

$$\text{e) } u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{b) } z = \ln \tan \frac{y}{x}$$

$$\text{d) } z = \arctan \frac{x + y}{x - y}$$

$$\text{f) } u = x^{y^2 z}.$$

9. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

$$\text{a) } z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\text{b) } z = x^2 \ln(x + y)$$

$$\text{c) } z = \arctan \frac{y}{x}.$$

$$10. \text{ Cho } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin^2 y}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}, \text{ tính } f''_{xy}(0, 0).$$

11. Tính các vi phân cấp hai của các hàm số sau

a) $z = xy^2 - x^2y$ b) $z = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$ c) $z = x^y$

12. Tính các vi phân cấp hai sau

a) $z = \ln(x - y)$, tính $d^2z(2, 1)$ b) $z = y^{x^3}$, tính $d^2z(1, 1)$.

3.3. Cực trị của hàm số nhiều biến số

13. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ c) $z = x^2 + y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$
 b) $z = x + y - xe^y$ d) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

14. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$
 b) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$.

15. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, y = 0, x + y = 6$
 b) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$.

16. Chỉ số Shannon đo lường mức độ đa dạng của một hệ sinh thái. Trong trường hợp ba loài, được xác định theo công thức:

$$H = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3$$

với p_i là tỉ lệ số lượng loài i trong quần thể ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Tìm giá trị lớn nhất của H .

3.4. Tích phân kép

17. Tính các tích phân sau

a) $\iint_D x \sin(x+y) dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}.$

b) $I = \iint_D x^2 (y-x) dx dy, D$ giới hạn bởi $y = x^2$ và $x = y^2$.

18. Đổi thứ tự lấy tích phân

a) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$

b) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

c) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dx.$

d) $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$

19. Tính các tích phân sau

a) $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2},$ trong đó $D : \begin{cases} 4y \leq x^2 + y^2 \leq 8y, \\ x \leq y \leq x\sqrt{3}. \end{cases}$

b) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$ trong đó $D : x^2 + y^2 \leq 1.$

c) $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$ trong đó $D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 12 \\ x^2 + y^2 \geq 2x \\ x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{3}y \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$