

ĐỀ CƯƠNG BÀI TẬP GIẢI TÍCH I - TỪ K62**Nhóm ngành 2****Mã số : MI 1112**

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3: Tự luận, 60 phút.

Nội dung: Chương 1 đến hết mục 1.8, Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7: Tự luận, 90 phút.

Chương 1**Phép tính vi phân hàm một biến số****1.1-1.4. Dãy số, hàm số**

1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{\operatorname{arccot} x - 5\pi}$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

b) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

d) $y = \arccos(\sin x)$.

2. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sinh(-x) = -\sinh x,$

b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$

c) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$

d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$

e) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$

f) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$

3. Tìm miền giá trị của hàm số

a) $y = \lg(1 - 2 \cos x)$

c) $y = \arctan(\sin x)$

b) $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$

d) $y = \arctan(e^x)$.

4. Tìm $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$.

5. Tìm hàm ngược của hàm số

a) $y = 2 \arcsin x$

b) $y = \frac{1-x}{1+x}$

c) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

1.5-1.6. Giới hạn hàm số

6. Tìm giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\sqrt{1+x} - \frac{1}{x}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\ln(1+3x)}$

7. Tìm giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \arccos^3 x) - \ln x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$.

8. Tìm giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4 \sin x)}{3^x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]$.

9. So sánh các cặp VCB sau:

a) $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ và $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$, khi $x \rightarrow 0^+$.

b) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$ và $\beta(x) = \cos x - 1$, khi $x \rightarrow 0^+$.

c) $\alpha(x) = x^3 + \sin^2 x$ và $\beta(x) = 1 - \cos x$, khi $x \rightarrow 0$.

1.7. Hàm số liên tục

10. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

11. Hàm $f(x)$ sau liên tục tại những giá trị x nào?

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ}, \\ 1, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ}. \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ}, \\ x, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ}. \end{cases}$

12. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

a) $y = \frac{8}{1 - 2^{\cot x}}$

c) $y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

b) $y = \frac{1}{x} \arcsin x$

d) $y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, (a \neq b)$

1.8. Đạo hàm và vi phân

13. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x)$, biết $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{nếu } x < 1, \\ (1 - x)(2 - x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$

14. Tính $f'(x)$ biết $f'(2017x) = x^2$.

15. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

a) Liên tục tại $x = 0$

c) Có đạo hàm liên tục tại $x = 0$.

b) Khả vi tại $x = 0$

16. Trong năm 2016, GDP (tổng thu nhập quốc dân) của Việt Nam theo đầu người là 6.421 USD, dân số (ước tính) 95.414.640, tốc độ tăng trưởng GDP 6,2%, tốc độ tăng dân số 1,1%. Xác định GDP và tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam trong năm 2016.

17. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

18. Tìm vi phân của hàm số

a) $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

c) $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|, (a \neq 0)$

b) $y = \arcsin \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

d) $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$

19. Tìm

a) $\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$

b) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

c) $\frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9).$

20. Cho hàm số $f(x)$, biết rằng đường tiếp tuyến với đồ thị của $f(x)$ tại điểm $(4,3)$ đi qua điểm $(0,2)$, tính $f(4)$ và $f'(4)$.

21. Xét phản ứng hóa học: $\text{NaOH} + \text{HCl} = \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$ trong dung dịch. Ban đầu, nồng độ NaOH và HCl có giá trị a mol/l. Khi đó nồng độ chất NaCl sẽ có giá trị: $x = \frac{a^2kt}{akt+1}$, với k là hằng số.

a) Xác định tốc độ phản ứng (số mol NaCl tạo thành trong một đơn vị thời gian) theo thời gian t .

b) Chứng minh rằng $x'(t) = k(a - x)^2$.

22. Phương trình trạng thái khí lý tưởng có dạng $pV = nRT$ với T là nhiệt độ tuyệt đối (K), p là áp suất (atm), V là thể tích (l) và R là hằng số chất khí ($0,0821 \text{l.atm.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$). Tại một thời điểm nào đó, áp suất $p = 8 \text{atm}$ và tăng với vận tốc $0,1 \text{atm/phút}$, thể tích $V = 10 \text{l}$ và giảm với vận tốc $0,15 \text{l/phút}$. Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ của chất khí tại thời điểm nói trên biết rằng số mol khí $n = 10$.

23. Nếu $C(x)$ là chi phí sản xuất của x đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là $C'(x)$ cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm

$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3.$$

Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại $x = 100$, giá trị đó nói lên điều gì?

24. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a) $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$

c) $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$

b) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$

d) $y = x^2 \sin x$, tính $y^{(50)}$.

25. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{x}{x^2 - 1} & \text{c) } y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} & \text{e) } y = \sin^4 x + \cos^4 x \\ \text{b) } y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} & \text{d) } y = e^{ax} \sin(bx + c). & \text{f) } y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

26. Tính vi phân cấp cao của các hàm số

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = (2x + 1) \sin x. \text{ Tính } d^{10}y(0). & \text{c) } y = x^9 \ln x. \text{ Tính } d^{10}y(1). \\ \text{b) } y = e^x \cos x. \text{ Tính } d^{20}y(0) & \text{d) } y = x^2 e^{ax}. \text{ Tính } d^{20}y(0) \end{array}$$

27. Trong hệ sinh thái, mô hình thú săn mồi - con mồi thường được sử dụng để tìm hiểu sự tương tác giữa các loài. Xét số lượng của sói rừng và hươu theo thời gian $W(t)$ và $C(t)$. Sự tương tác được mô tả theo các phương trình:

$$C'(t) = aC(t) - bC(t)W(t) \quad W'(t) = -cW(t) + dC(t)W(t),$$

với a, b, c, d là các hằng số.

- Với các giá trị nào của $C(t)$ và $W(t)$ thì hệ ổn định (số lượng sói và hươu không đổi).
- Với điều kiện nào thì một trong hai loài tuyệt chủng.
- Với điều kiện nào thì cả hai loài sẽ tuyệt chủng.

28. Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ P được mô tả bởi phương trình:

$$P'(t) = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c} \right) P(t) - \beta P(t)$$

với r_0 là tỉ lệ sinh sản, P_c là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì, β là tỉ lệ khai thác. Cho $P_c = 10000$, tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là

5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

29. Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

30. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

31. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $-1 \leq x \leq 1$.

32. Chứng minh bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

b) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a$

c) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}, 0 < a < b$.

33. Tồn tại hay không hàm f sao cho $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ và $f'(x) \leq 2$ với mọi x ?

34. Tìm giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}$.

35. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

36. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b) . Chứng minh rằng với mọi $x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c).$$

37. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a) $y = x^4 + x^2 - x + 1$ b) $y = \arctan x - x$ c) $y = x + |\sin 2x|$

38. Chứng minh bất đẳng thức

a) $2x \arctan x \geq \ln(1 + x^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

b) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$.

39. Tìm cực trị của hàm số

a) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

c) $y = \sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}$

b) $y = x - \ln(1 + x)$

d) $y = x^{\frac{2}{3}} + (x - 2)^{\frac{2}{3}}$.

40. Một nhà bán lẻ bán 1200 TV một tuần ở mức giá 35 triệu. Một nghiên cứu thị trường chỉ ra, cứ giảm giá 1 triệu thì lượng bán sẽ tăng lên 80 chiếc một tuần. Giá thành sản xuất trong tuần là x chiếc TV là: $C(x) = 350 + 12x$ (triệu).

a) Tìm hàm đơn giá và hàm doanh thu (theo lượng bán).

b) Cửa hàng nên bán ở mức giá bao nhiêu để cực đại doanh thu?

c) Tìm giá bán để cực đại lợi nhuận.

41. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, chứng minh rằng $\forall c \in (a, b)$, ta có:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

42. Cho $x, y > 0$, chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}}$

b) $x \ln x + y \ln y \geq (x + y) \ln \frac{x+y}{2}$

1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

43. Tìm tiệm cận của các đường cong sau

a) $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$

d) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = \frac{2016t^2}{1 - t^3} \end{cases}$

b) $y = \ln(1 + e^{-x})$

e) $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \arctan t \end{cases}$

c) $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1 + x^2}$

44. Khảo sát hàm số

a) $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$

e) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1 - t^2} \\ y = \frac{t^2}{1 + t} \end{cases}$

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

f) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

c) $y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$

g) $r = a + b \cos \varphi, (0 < a \leq b)$

d) $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

h) $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, (a > 0).$

Chương 2

Phép tính tích phân hàm một biến số

2.1 Tích phân bất định

1. Tính các tích phân

a) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$

e) $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+5)}$

b) $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

f) $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

g) $\int \sin x \sin(x+y) dx$

d) $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}$

h) $\int \frac{1+\sin x}{\sin^2 x} dx.$

2. Tính các tích phân

a) $\int \arctan x dx$

e) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$

b) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx$

f) $\int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx$

c) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

g) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

d) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2} dx$

h) $\int \arcsin^2 x dx.$

3. Lập công thức truy hồi tính I_n

a) $I_n = \int x^n e^x dx$

b) $I_n = \int \sin^n x dx$

c) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}.$

2.2. Tích phân xác định

4. Tính các đạo hàm

a) $\frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt$

b) $\frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt$

c) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$

5. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

6. Tính các giới hạn

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

7. Tính các tích phân sau

$$a) \int_{1/e}^e |\ln x| (x+1) dx \quad c) \int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} \quad e) \int_0^{\pi/4} \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$$

$$b) \int_1^e (x \ln x)^2 dx \quad d) \int_0^3 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx \quad f) \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx.$$

8. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$a) \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx \quad b) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx.$$

Áp dụng tính các tích phân sau

$$c) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x} \quad d) \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}} \quad e) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

9. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Giả sử, $f^2(x), g^2(x)$ và $f(x).g(x)$ khả tích trên $[a, b]$, chứng minh bất đẳng thức (với $a < b$):

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

2.3. Tích phân suy rộng

10. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

a) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

b) $\int_0^{+\infty} \cos x dx$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

11. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$

c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

12. Nếu $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ thì có suy ra được $f(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$ không?

Xét ví dụ $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

13. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$. Hỏi

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ có hội tụ không.

2.4. Ứng dụng của tích phân xác định

14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Đường parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

b) Parabol bậc ba $y = x^3$ và các đường $y = x, y = 2x, (x \geq 0)$

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và parabol $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

d) Đường $y^2 = x^2 - x^4$.

15. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2, (a > 0)$.

16. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt paraboloid $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ $x = 0, z = 0$ và mặt phẳng $x = a$ ($a \neq 0$).

17. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$

a) Quay quanh trục Ox một vòng

b) Quay quanh trục Oy một vòng.

18. Tính độ dài đường cong

a) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ khi x biến thiên từ 1 đến 2.

b) $\begin{cases} x = a \left(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \\ y = a \sin t \end{cases}$ khi t biến thiên từ $\frac{\pi}{3}$ đến $\frac{\pi}{2}$ ($a > 0$).

19. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ quay quanh trục Ox

b) $y = \frac{1}{3}(1 - x)^3, 0 \leq x \leq 1$ quay quanh trục Ox .