CHƯƠNG 3

KHÔNG GIAN VECTOR

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3:Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

3.1. Hệ vectơ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

Trong không gian vectơ V, cho hệ vectơ $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

+ Hệ S gọi là hệ độc lập tuyến tính nếu từ hệ thức

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = \theta \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

ta suy ra được $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

+ Hệ S gọi là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại

$(c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0;0;\dots;0)$ sao cho

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = \theta$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

Nhận xét

- Một hệ con của một hệ độc lập tuyến tính là một hệ độc lập tuyến tính.

- Một hệ vectơ chứa một hệ phụ thuộc tuyến tính là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

- Một hệ vectơ chứa vectơ không là phụ thuộc tuyến tính.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Ví dụ1 .Cho $x_1 = (1,2); x_2 = (3,7);$ $x_3 = (2,4)$ Ta có

$$4(1,2) + 0(3,7) - 2(2,4) = (0,0)$$

Suy ra, hệ vector $\{x_1, x_2, x_3\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

Ví dụ 2.

Cho không gian vector $V = \mathbb{R}^3$ và hệ

$$\{x_1 = (1,1,1), x_2 = (1,1,0), x_3 = (1,0,0)\}.$$

Xét sự độc lập của hệ vector trên.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Xét đẳng thức:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \theta$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(1,0,0) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2, \lambda_1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ vector trên độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

Ví dụ 3.

Cho không gian vector $V = \mathbb{R}^2$ và hệ 3 vector

$$\{x_1 = (1, -2), x_2 = (1, 4), x_3 = (3, 5)\}.$$

Xét sự độc lập tuyến tính của hệ vector trên.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Xét đẳng thức:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \theta$$

$$\lambda_1(1,-2) + \lambda_2(1,4) + \lambda_3(3,5) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3, -2\lambda_1+4\lambda_2+5\lambda_3) = (0,0)$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

$$(\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3, -2\lambda_1+4\lambda_2+5\lambda_3) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -3\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 = -5\lambda_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{7}{6}\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\dfrac{11}{6}\lambda_3 \end{cases}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Từ đây ta có thể chọn ra rất nhiều bộ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ không đồng thời bằng không thỏa mãn đẳng thức trên.

Chẳng hạn $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 11,\ \lambda_3 = -6$

$$7.(1,-2) + 11.(1,4) - 6.(3,5) = (0,0)$$

Vậy hệ vector trên là phụ thuộc tuyến tính.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

Ví dụ4.

Cho không gian vector $V = P_2[t]$ và hệ vector

$x_1(t) = t^2 - 2t - 1$

$x_2(t) = 2t^2 - t$

$x_3(t) = 3t - 5.$

Xét sự độc lập của hệ vector trên.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Xét đẳng thức:

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + \lambda_3 x_3(t) = \theta$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(t^2-2t-1)+\lambda_2(2t^2-t)+\lambda_3(3t-5) \equiv 0t^2+0t+0$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

$$\lambda_1(t^2-2t-1)+\lambda_2(2t^2-t)+\lambda_3(3t-5)\equiv 0t^2+0t+0$$

$$(\lambda_1+2\lambda_2)t^2+(-2\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3)t+(-\lambda_1-5\lambda_3)\equiv 0t^2+0t+0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2=0 \\ -2\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ -\lambda_1-5\lambda_3=0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

→ Hệ chỉ có nghiệm tầm thường là (0;0;0).

→ Hệ độc lập tuyến tính

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Ví dụ 5. Trong không gian các hàm số liên tục xét tính độc lập tuyến tính của hệ vectơ:

$$\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{\sin x},\ \ e^{x}.$$

Lời giải:

Xét $\lambda_1.\boldsymbol{x} + \lambda_2.\boldsymbol{\sin x} + \lambda_3.e^{x} = 0$

Cho x=0, ta được $\lambda_1.0 + \lambda_2.0 + \lambda_3.1 = 0$

Cho $\boldsymbol{x} = \pi$, ta được $\lambda_1.\pi + \lambda_2.0 + \lambda_3.\boldsymbol{e}^{\pi} = 0$

Cho $\boldsymbol{x} = \dfrac{\pi}{2}$, ta được $\lambda_1.\dfrac{\pi}{2} + \lambda_2.1 + \lambda_3.\boldsymbol{e}^{\pi/2} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ Hệ độc lập tuyến tính.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Phương pháp [xét sự độc lập của hệ vector]:
$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 1. Xét đẳng thức:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta.$$

2. Đưa đẳng thức trên về hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.
3. Tìm hạng của ma trận hệ số của hệ PTTT thuần nhất.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Khi đó:

a. Nếu $r(A) = n$ thì hệ chỉ có nghiệm tầm thường nên suy ra hệ vector X độc lập tuyến tính.

b. Nếu $r(A) < n$ thì hệ có nghiệm không tầm thường nên suy ra hệ vector X phụ thuộc tuyến tính.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

- **Ví dụ 6.** Xét sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính của hệ vector sau

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Xét đẳng thức:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = \theta$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

$$\lambda_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0\\ 2\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4=0\\ 3\lambda_3+3\lambda_4=0\\ 4\lambda_4=0\end{cases}\qquad A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

- **Bài tập 1.** Xét sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính của hệ vector sau trong không gian tương ứng.

$a)\ A=\{x_1=(1,-1,0);x_2=(2,3,-1);x_3=(-1,4,5)\}$

$b)\ B=\{x_1(t)=t^2-t;x_2(t)=2t^2+3t-1;x_3(t)=-t^2+4t+5\}$

$c) C=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$

$$X_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix};X_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix};X_3=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix};X_4=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

Bài tập 2: Trong không gian cho hệ vectơ.

$$v_1 = (1;1;2), v_2 = (3;2;1), v_3 = (-1;1;m)$$

Tìm m để hệ trên độc lập tuyến tính.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

3.2. Cơ sở và số chiều.

3.2.1 Định lý. Trong không gian vectơ V, cho hai hệ vectơ S_1 và S_2. Nếu S_1 là hệ sinh và S_2 là độc lập tuyến tính thì $|S_1| \geq |S_2|$.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3. Cơ sở và số chiều

3.2.2. Định nghĩa: ***Hệ vectơ E trong KGVT V là một cơ sở của V nếu nó vừa là hệ sinh vừa là hệ độc lập tuyến tính.***

Ví dụ: Hệ vector

$$E = \{e_1 = (1,0); e_2 = (0,1)\}$$

là cơ sở của không gian vector $\mathbb{R}^2$.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Thật vây, E là hệ sinh (theo ví dụ trên) và từ đẳng thức

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \theta$$

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0,$$

nên hệ E độc lập tuyến tính.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Ví dụ: Hệ vector

$$E' = \{e_1 = (1,0); e_2 = (0,1); e_3 = (2,5)\}$$

không là cơ sở của không gian vector $\mathbb{R}^2$.

Vì hệ E' là hệ sinh nhưng không độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét hệ thức

$$2(1,0) + 5(0,1) - (2,5) = (0,0),$$

$$2e_1 + 5e_2 - e_3 = \theta.$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

VD. Hệ E={e_1=(1;0;0), e_2=(0;1;0), e_3=(0;0;1)} là cơ sở cua không gian $\mathbf{R}^3$. Cơ sở này gọi là cơ sở chính tắc của không gian $\mathbf{R}^3$.

Thật vây, E là hệ sinh (theo ví dụ trên) và từ đẳng thức

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \theta$$

$$\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

nên hệ E độc lập tuyến tính.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Tương tự: Ta có

$$x_1(t) = t^2; x_2(t) = t; x_3(t) = 1$$

là có sở của không gian vector $P_2[t]$.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

là có sở của không gian vector M_{22}.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

3.2.3. Định lý. Nếu $B_1=\{v_1, v_2,\ldots, v_m\}$ và $B_2=\{u_1, u_2,\ldots, u_n\}$ là hai cơ sở của KGVT V thì m=n.

(tức là mọi cơ sở của V có cùng số phần tử)

C/m:.....

3.2.4 Định nghĩa. Nếu V có một cơ sở gồm n phần tử thì V gọi là ***không gian n chiều***, kí hiệu là

$$\dim V=n$$

Khi đó, ta nói V là ***không gian hữu hạn chiều***.
Ngược lại, ta nói V là ***không gian vô hạn chiều***.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Ta có:

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2; \dim \mathbb{R}^3 = 3,$$

$$\dim P_2[t] = 3; \dim M_{22} = 4.$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

3.2.5. Cơ sở chính tắc của một số không gian

(i)$\mathbf{R^n}$ Cơ sở chính tắc là $E=\{e_1, e_2,\ldots, e_n\}$ với

$$e_1 = (1;0;0;...;0)$$

$$e_2 = (0;1;0;...;0)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0;0;...;0;1)$$

$$\boxed{\dim \mathbf{R^n} = \mathbf{n}}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

3.2.5. Cơ sở chính tắc của một số không gian

(ii) Không gian các đa thức bậc không quá n: $\mathbf{P_n[x]}$

Cơ sở chính tắc là $\mathbf{E=\{1, x, x^2,\ldots, x^n\}}$

$$\boxed{\dim P_n[x] = n+1}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

3.2.5. Cơ sở chính tắc của một số không gian

(iii) Không gian M(m,n) các ma trận cỡ mxn

Cơ sở chính tắc là $\mathbf{E=\{A_{kl}|\ 1\le k\le m, 1\le l\le n\}}$

với $A_{kl}=\left[a_{ij}^{kl}\right]$ xác định bởi

$$a_{ij}^{kl}=\begin{cases}1 & khi\ (i=k)\wedge(j=l)\\ 0 & khi\ (i\neq k)\vee(j\neq l)\end{cases}$$

$$\boxed{\dim M(m,n)=m.n}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

3.2.6. Định lý: Cho V là không gian vecto n chiều. Khi đó, B=$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là cơ sở nếu B độc lập tuyến tính hoặc B là hệ sinh.

Ví dụ: Chứng minh rằng hệ vecto $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ với $e_1 = (1,1,1);\ e_2 = (1,1,0);\ e_3 = (1,0,1)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

3.2.7. Định lý. Từ một hệ độc lập tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều, ta luôn có thể bổ sung các vec tơ để được một cơ sở.

C/m: G/s S là một hệ độc lập tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều V.

Nếu S không phải là một cơ sở của V, tức là $span(S) \neq V$. Khi đó, lấy $v \in V \setminus span(S)$ ta sẽ có $S' = S \cup \{v\}$ là một hệ độc lập tuyến tính.

Làm tương tự cho hệ S'. Vì V hữu hạn chiều nên quá trình trên là hữu hạn.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§3: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

3.3. Tọa độ của một vecto đối với một cơ sở.

3.3.1. Định lý và định nghĩa.

Cho **B**=$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của KGVT V. Với mọi vec tơ x của V, ta luôn có biểu diễn duy nhất:

$$\boldsymbol{x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n}$$

Bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gọi là tọa độ của x đối với **B**

Kí hiệu: $(x)_{\mathbf{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§6: Cơ sở và số chiều

Ma trận tọa độ của x đối với cơ sở **B** là:

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§6: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

VD1. Trong không gian $\mathbb{R}^3$,cho các vectơ

$$\boldsymbol{v}_1 = (2;3;1), \boldsymbol{v}_2 = (1;2;1), \boldsymbol{v}_3 = (1;1;1), \boldsymbol{u} = (9;14;6)$$

a) Tìm tọa độ của $\boldsymbol{u}$ đối với cơ sở chính tắc E.

b) Tìm tọa độ của $\boldsymbol{u}$ đối với cơ sở $\boldsymbol{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Đ/s: $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{E}} = (9;14;6)$

$(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{B}} = (3;2;1)$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§6: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

3.3.2. Công thức đổi tọa độ khi đổi cơ sở

a. Bài toán: Trong kgvt V cho hai cơ sở B và B' và vecto $v \in V$. Tìm mối quan hệ giữa $[v]_B$ và $[v]_{B'}$

b. Ma trận chuyển cơ sở.

G/s $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Ma trận $C = \left[[u_1]_B \quad [u_2]_B \quad \cdots \quad [u_n]_B \right]$ gọi là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§6: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

ĐL. Nếu C là mtr chuyển cơ sở từ B sang B' thì C là mtr khả nghịch và C^{-1} là mtr chuyển cơ sở từ B' sang B.

c. Công thức

Nếu C là mtr chuyển cơ sở từ B sang B' thì

$$[v]_B = C[v]_{B'} \quad \text{hay} \quad [v]_{B'} = C^{-1}[v]_B$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§6: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

VD. Trong không gian $\mathbb{R}^4$,cho các vectơ

$$\boldsymbol{v}_1 = (2;3;1), \boldsymbol{v}_2 = (1;2;1), \boldsymbol{v}_3 = (1;1;1), \boldsymbol{u} = (9;14;6)$$

a) Xác định mtr chuyển cơ sở từ E sang $\boldsymbol{B} = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$

b) Xác định mtr chuyển cơ sở từ B sang E

c) Kiểm tra $[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{B}}$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§6: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

Bài tập:

Trong KGVT $\mathbb{R}^3$ cho các vector

$$f_1 = (1,2,3), f_2 = (-1,1,0), f_3 = (2,1,1), x = (4,6,-3)$$

CMR: hệ vector $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$; tìm tọa độ của vector x đối với cơ sở F.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§6: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

Bài tập:

Trong KGVT $\mathbb{R}^3$ cho các vector

$$f_1 = (1,2,3), f_2 = (-1,1,0), f_3 = (2,1,m)$$

Tìm m để hệ vector $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§6: Cơ sở và số chiều

Đại Số Tuyến Tính

Bài tập:

Trong KGVT $\mathbb{R}^3$ cho các vector

$$f_1 = (1,0,2), f_2 = (-1,1,0), f_3 = (0,1,1), x = (4,7,m)$$

Tìm m để x là tổ hợp tuyến tính của hệ vector

$$F = \{f_1, f_2, f_3\}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§4: Cơ sở của không gian con

4.1. Hạng của hệ vectơ

4.1.1. Định nghĩa. Cho $S=\{v_1, v_2,\ldots, v_m\}$ trong không gian vecto V. Ta gọi hạng của S, kí hiệu r(S) là số tối đa các vecto độc lập tuyến tính của hệ đó.

*** NX**: +) $r(S) \le m$

+) $r(S) = m \Leftrightarrow$ S độc lập tuyến tính

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§6: Cơ sở của không gian con

Đại Số Tuyến Tính

4.1.2. Cách tìm hạng của hệ vectơ trong không gian hữu hạn chiều

Cho S=$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ trong không gian vecto V. Giả sử B là một cơ sở của V và ta có

$$(v_i)_B = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), \quad \forall i = \overline{1, m}$$

Đặt A=$[a_{ij}]$. Khi đó, ta có

r(S)= r(A)

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§4: Cơ sở của không gian con

Ví dụ 1.

Trong không gian $\mathbf{R}^4$, tìm hạng của hệ vecto sau:

$\{ v_1 = (2;1;-1;3), v_2 = (1;2;0;1), v_3 = (5;4;-2;7) \}$

Ví dụ 2.

Trong không gian $\mathbf{P_3[x]}$, tìm hạng của hệ vecto sau:

$\{ p_1 = 1+2x - 3x^2 + x^3, p_2 = 2- x + x^2 - x^3 ,$

$p_3 = 3+x - 2x^2 , p_4 = 1+x + x^2 + x^3 \}$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§4: Cơ sở của không gian con

4.1.3. Không gian con sinh bởi hệ vectơ

a.Định lý. Số chiều của không gian con W sinh bởi hệ vectơ S bằng hạng của hệ vectơ đó.

$$\dim W = \dim \mathrm{span}(S) = r(S)$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§4: Cơ sở của không gian con

b. Bài toán xác định số chiều và một cơ sở của không gian sinh bởi hệ vectơ

Cho hệ vecto S và W=span(S).

+ dimW = r(S)=r.

+ Tìm r vec tơ trong hệ S sao cho chúng độc lập tuyến tính. Khi đó, r vec tơ đó lập thành một cơ sở của W.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§4: Cơ sở của không gian con

Đại Số Tuyến Tính

Ví dụ 1.

Trong không gian $\mathbf{R}^4$, tìm số chiều và một cơ sở của không gian con W= span$\{v_1, v_2, v_3\}$ với

v_1= (2;1;-1;3), v_2= (1;2;0;1), v_3= (5;4;-2;7)

Ví dụ 2.

Trong không gian $\mathbf{P_3[x]}$, tìm số chiều và một cơ sở của không gian con W=span$\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ với

$p_1=1+2x - 3x^2+x^3$, $p_2 =2- x +x^2 - x^3$, $p_3=3+x - 2x^2$, $p_4=1+x +x^2+x^3$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

Một số đề thi

Đại Số Tuyến Tính

Câu 1.(K51)

(i) Trong không gian $P_2[x]$, cho các vectơ

$$v_1 = 1 + x^2, v_2 = 2 + x, v_3 = 3 - x + 2x^2, v_4 = 11 - 6x + 11x^2$$

Chứng minh rằng $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ lập thành một cơ sở của $P_2[x]$. Xác định tọa độ của vecto v đối với cơ sở B.

(Đề III)

(ii) Câu hỏi tương tự với

$$v_1 = 1 + x,\ v_2 = x + 2x^2,\ v_3 = 2 - x + x^2,\ v_4 = 5 - 3x - 9x^2$$

(Đề IV)

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

Một số đề thi

Đại Số Tuyến Tính

Câu 2.(K54)

(i) Trong không gian $P_2[x]$, cho các vectơ

$$v_1 = 1 + x + x^2, v_2 = 3x + x^2,$$

$$v_3 = -2 + x + x^2, v_4 = 2 + 5x + 4x^2$$

Gọi V_1=Span$\{v_1,v_2\}$, V_2=Span$\{v_3,v_4\}$. Xác định một cơ sở của $V_1 \cap V_2$ (Đề I)

(ii) Câu hỏi tương tự với

$$v_1 = 1 - x - x^2, v_2 = 2 - x + x^2,$$

$$v_3 = -4 + 2x + x^2, v_4 = 1 + x + 2x^2$$

(Đề II)

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM

Một số đề thi

Đại Số Tuyến Tính

Câu 3.

Trong không gian $P_3[x]$, cho các vectơ

$$v_1 = 1 - x + 2x^2 + 3x^3, v_2 = 2 + x + 2x^3,$$
$$v_3 = 3 + 2x^2 + 4x^3, v_4 = 5 + x + 2x^2 + 7x^3$$

Đặt V_1=span(v_1,v_2), V_2 =span(v_3,v_4).

a) Tìm cơ sở và số chiều của V_1+V_2.

b) Vectơ $v=1+x+x^2+x^3$ có thuộc V_1+V_2 hay không?

(Hè 2009)

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ac
WWW.PRINT-DRIVER.COM