# MI1131 GIẢI TÍCH III

**1. Tên học phần**: **Giải tích III (Calculus III)**

**2. Mã học phần: MI1131**

**3. Khối lượng: 3(2-2-0-6)**

a. Lý thuyết: 30 tiết
b. Bài tập: 30 tiết

**4. Đối tượng tham dự:** Sinh viên đại học thuộc nhóm học 1, từ học kì 2

**5. Điều kiện học phần:**

- Học phần tiên quyết: Giải tích I,
- Học phần học trước: Đại số, Giải tích I
- Học phần song hành: Giải tích II

**6. Mục tiêu học phần và kết quả mong đợi**

Cung cấp các kiến thức về chuỗi số, chuỗi hàm, các phương trình vi phân cơ bản cấp 1, cấp 2, biến đổi Laplace một phía, hình thành kiến thức nền tảng cho sinh viên các ngành công nghệ, cung cấp các công cụ toán học cho sinh viên sử dụng trong các bài toán kỹ thuật như dao động cơ học, xử lý tín hiệu, vv..

Sau khi hoàn thành học phần này, yêu cầu sinh viên có khả năng:

Sinh viên có thể kiểm tra tính hội tụ của chuỗi số, chuối hàm, giải được các phương trình vi phân cơ bản cấp 1, 2, tính được biến đổi Laplace của hàm bị chặn mũ, áp dụng giải phương trình vi phân, một số bài toán thực tế.

| Tiêu chí | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 4.1 | 4.2 | 4.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mức độ | | | GT | GT | SD | GT | GT | | | | | SD | | | SD | SD |

**7. Nội dung vắn tắt học phần:**

Chuỗi số, chuỗi hàm, chuỗi Fourier, phương trình vi phân cấp I, phương trình vi phân tuyến tính cấp II, hệ phương trình vi phân cấp I, Biến đổi Laplace, một số mô hình bài toán kỹ thuật.

**8. Tài liệu học tập:**

- Sách giáo trình:
  [1] Nguyễn Đình Trí (chủ biên): *Toán học cao cấp tập II.*
  [2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên): *Toán học cao cấp tập III.*

- Tài liệu tham khảo:
  [1] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh. *Bài tập Toán học cao cấp tập II* NXBGD, 2000.
  [2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh. *Bài tập Toán học cao cấp tập III* NXBGD, 1999.
  [3] Nguyễn Xuân Thảo. Bài giảng Phương pháp Toán tử Laplace, 20101
  [4] Nguyễn Thiệu Huy: **INFINITE SERIES AND DIFFERENTIAL EQUATIONS-download: http://sami.hust.edu.vn/tai-lieu/**

**9. Phương pháp học tập và nhiệm vụ của sinh viên**:

Dự lớp: đầy đủ theo quy chế

Bài tập: hoàn thành các bài tập của học phần

Dự kiểm tra giữa kỳ : Tự luận, 60 phút, sau khi học tám tuần, Viện tổ chức. Nội dung: Chương 1. Chuỗi.

**10. Đánh giá kết quả: QT(0,3) – T(0,7)**

- Điểm quá trình: trọng số 0,3
- Điểm thi cuối kỳ (trắc nghiệm hoặc tự luận): trọng số 0,7

**11. Nội dung và kế hoạch học tập cụ thể**

| Tuần | Nội dung | Giáo trình | BT, TN,… |
|---|---|---|---|
| 1 | **Chương 1. Chuỗi**<br>**1.1** Đại cương về chuỗi số<br>- Các khái niệm: Chuỗi số, số hạng tổng quát, tổng riêng, phần dư, chuỗi hội tụ, phân kỳ, tổng của chuỗi hội tụ. Chú ý: Phải có ví dụ chuỗi hình học $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$<br>- Các tính chất cơ bản của chuỗi số hội tụ:<br>+) Điều kiện cần để chuỗi hội tụ (chứng minh). Chú ý: Phải có ví dụ chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$<br>+) Các tính chất tổng và hiệu hai chuỗi hội tụ, nhân với hằng số (học sinh tự đọc chứng minh) | | 1.1 |
| 2 | **1.2** Chuỗi số với số hạng dương<br>- Định nghĩa<br>- Các định lý so sánh 1 và 2 (chứng minh định lý 1, học sinh tự đọc chứng minh định lý 2)<br>- Các tiêu chuẩn hội tụ (tiêu chuẩn D'Alambert, Cauchy, tích phân) (Chứng minh tiêu chuẩn D'Alambert, học sinh tự đọc chứng minh 2 tiêu chuẩn còn lại). Chú ý: Phải có ví dụ chuỗi Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ | | 1.2 |
| 3 | **1.3** Chuỗi số với các số hạng có dấu bất kỳ<br>- Chuỗi có dấu bất kỳ: các khái niệm hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ. Quan hệ giữa sự hội tụ tuyệt đối và hội tụ (học sinh tự đọc chứng minh). Chú ý nhấn mạnh tiêu chuẩn D'Alambert, Cauchy dùng để kiểm tra sự hội tụ tuyệt đối và phân kỳ của chuỗi có dấu bất kỳ.<br>- Chuỗi số đan dấu: định nghĩa, định lý Leibniz | | 1.3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (có chứng minh)<br>- Các tính chất của chuỗi số hội tụ tuyệt đối. Tính chất đổi thứ tự, nhóm các số hạng và tích hai chuỗi (học sinh tự đọc chứng minh) | | |
| 4 | **1.4** Chuỗi hàm số<br>- Định nghĩa chuỗi hàm, miền hội tụ của chuỗi hàm (hội tụ điểm), cách tìm miền hội tụ, tổng của chuỗi hàm<br>- Sự hội tụ đều của chuỗi hàm: định nghĩa, tiêu chuẩn Weierstrass (không chứng minh)<br>- Các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều: tổng là hàm liên tục, tích phân, đạo hàm dưới tổng (học sinh tự đọc chứng minh) | | 1.4 |
| 5 | **1.5** Chuỗi luỹ thừa<br>- Định nghĩa chuỗi luỹ thừa: định lý Abel (có chứng minh), bán kính hội tụ, khoảng và miền hội tụ<br>- Các tính chất của chuỗi luỹ thừa: hội tụ đều, liên tục, tích phân, đạo hàm dưới tổng, tính khả vi vô hạn trên khoảng hội tụ (học sinh tự đọc chứng minh). Phần áp dụng để tính tổng một số chuỗi (chỉ nêu một ví dụ, còn lại học sinh tự đọc) | | 1.5 |
| 6 | - Khai triển hàm thành chuỗi luỹ thừa (Chuỗi Taylor, Maclaurin). Định lý để hàm khai triển được (không chứng minh)<br>- Các khai triển của một số hàm số sơ cấp cơ bản.<br>- Áp dụng để tính gần đúng giá trị của hàm, tính gần đúng tích phân xác định (học sinh tự đọc)<br>**1.6** Chuỗi Fourier<br>- Chuỗi lượng giác, hệ số Fourier và chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $2\pi$ và liên tục từng khúc trên $(-\pi,\pi)$ (tổng quát chu kì cho hàm tuần hoàn chu kì *2L*) | | 1.5<br>1.6 |
| 7 | - Định lý Dirichlet (không chứng minh) về sự hội tụ và tổng của chuỗi Fourier<br>- Khai triển hàm chẵn, hàm lẻ<br>- Khai triển hàm bất kỳ trên đoạn hữu hạn $[a,b]$ (lấy ví dụ trên nửa chu kỳ (0, *L*) rồi thác triển lên toàn (-*L*, *L*) ) | | 1.6 |
| 8 | **Chương 2. Phương trình vi phân**<br>**2.1** Gợi động cơ và các khái niệm mở đầu:<br>- Giới thiệu một số bài toán kỹ thuật (mạch điện, bài toán vật rơi, vv..) dẫn đến phương trình vi phân<br>- Định nghĩa phương trình vi phân (PTVP), cấp | | 2.1<br>2.2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | của phương trình, nghiệm của PTVP.<br>**2.2** Phương trình vi phân cấp 1<br>- Đại cương về PTVP cấp 1: dạng tổng quát của PT, định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm (không chứng minh), bài toán Cauchy, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng | | |
| 9 | - PT biến số phân ly, PT thuần nhất (đẳng cấp)<br>- PT tuyến tính, PT Bernoulli<br>- PTVP toàn phần, thừa số tích phân, công thức thừa số tích phân chỉ phụ thuộc *x* hoặc *y* | | 2.2 |
| 10 | **2.3** Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2<br>- Đại cương về PTVP tuyến tính cấp 2: Dạng tổng quát, định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm, bài toán Cauchy, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng<br>- PT tuyến tính thuần nhất y” + p(x)y’ + q(x)y = 0 :<br>+) Nghiệm độc lập (phụ thuộc tuyến tính), Wronskian, Cấu trúc nghiệm $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ .<br>+) Trường hợp hệ số hằng y” + *a*y’ + *b*y = 0 : PT đặc trưng, công thức nghiệm tổng quát. | | 2.3 |
| 11 | +) Mô hình dao động tự do của lò xo gắn khối lượng : Tuần hoàn và tắt dần<br>- Phương trình không thuần nhất y” + p(x)y’ + q(x)y = f(x)<br>+) Định lý về nghiệm tổng quát (học sinh tự đọc chứng minh). Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Nguyên lý chồng chất nghiệm | | 2.3 |
| 12 | +) PTVP có hệ số không đổi y” + *a*y’ + *b*y = f(x) : Phương pháp hệ số bất định với hàm vế phải f(x) có dạng:<br>$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$<br>$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$<br>+) Mô hình dao động cưỡng bức của lò xo gắn với khối lượng: Tác động của ngoại lực, ngoại lực tuần hoàn, sự cộng hưởng | 2.3 | |
| 13 | **2.4** Hệ phương trình vi phân cấp 1<br>- Định nghĩa dạng tổng quát, nghiệm, đưa PTVP cấp cao về hệ chuẩn tắc và ngược lại. Định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm. Phương pháp khử (thể hiện qua một ví dụ giải hệ gồm 2 phương trình có hệ số không đổi dạng đơn giản) (giáo viên hướng dẫn học sinh tự đọc và làm bài tập)<br>**Chương 3. Phép biến đổi Laplace**<br>**3.1** Phép biến đổi Laplace, miền xác định, phép biến đổi Laplace ngược<br>**-** Phép biến đổi (PBĐ) Laplace, hàm liên tục từng khúc (trên mỗi đoạn hữu hạn) và bị | | 2.4<br>3.1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | chặn mũ, miền xác định của PBĐ Laplace<br>- PBĐ Laplace ngược, sự duy nhất của PBĐ Laplace ngược | | |
| 14 | **3.2** Tính chất của PBĐ Laplace<br>**-** Tính tuyến tính, PBĐ Laplace của đạo hàm của *f(t)*, và của *F(s)*, giới thiệu bảng PBĐ Laplace của một số hàm (bảng sẽ được bổ sung dần khi có thêm tính chất của PBĐ).<br>- PBĐ của tích phân của *f*(*t*), *F(s).*<br>- Tính chất tịnh tiến: Tịnh tiến theo biến *s;* Hàm Heaviside $u(t-t_0)$ và tịnh tiến theo biến *t*<br>- Tích chập (một phía) của hai hàm:<br>+) Định nghĩa tích chập, các tính chất<br>+) PBĐ Laplace của tích chập | | 3.2 |
| 15 | 3.3 Áp dụng PBĐ Laplace để giải các phương trình vi phân<br>- Lược đồ áp dụng Laplace để giải phương trình vi phân và hệ hai phương vi phân cấp 2<br>- Các ví dụ về giải phương trình vi phân, đặc biệt là các phương trình với vế phải rời rạc, cách chuyển hàm rời rạc về hàm Heaviside<br>- Nghiệm phương trình vi phân dưới dạng tích chập | | 3.3 |

**12. Nội dung các bài thí nghiệm (thực hành, tiểu luận, bài tập lớn)**

**NHÓM BIÊN SOẠN ĐỀ CƯƠNG**

PGS.TSKH. Nguyễn Thiệu Huy TS. Vũ Thị Ngọc Hà

Ngày tháng năm

**CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG KH&ĐT KHOA TOÁN TIN ỨNG DỤNG**

*(Họ tên và chữ ký)*

**Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội**

**Viện Toán ứng dụng và Tin học - 2018**

**BÀI TẬP GIẢI TÍCH III (Phương trình vi phân và chuỗi)**
**Nhóm học 1: Mã MI1131**

**Kiểm tra giữa kỳ : Tự luận**

**Thi cuối kỳ : Tự luận**

## I. CHUỖI

**1) Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau**

a) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\ldots$

b) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

c) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{225}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7}{4^n}-\dfrac{5}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$

**2)** Các chuỗi sau hội tụ hay phân kỳ? tại sao?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+\dfrac{3}{5^n}\right]$  b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

**3) Sử dụng các tiêu chuẩn: So sánh; D'Alembert; Cauchy; Tích phân, xét sự hội tụ của các chuỗi sau**

| | | |
|---|---|---|
| a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{10n^2+1}$ | b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$ | c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1+n}{n^2-1}\right)^2$ |
| d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$ | e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1+n}{n}\right)^n$ | f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ |
| g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ | h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{1+n}{n-1}$ | i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{1+n}{n}\right)$ |
| k) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\tan\dfrac{1}{n^2}$ | l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$ | m) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$ |

**4) Xét sự hội tụ của các chuỗi số**

| | | |
|---|---|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ | b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$ | c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$ |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)n}$ | e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$ |
| g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2}$ | h*) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right]$ | i) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$ |
| k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$ | | |

**5) Xét sự hội tụ của các chuỗi số**

| | |
|---|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$ | b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n-\ln n}$ |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin(e^{-n})$ | d) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right),\quad a\in\mathbb{R}$ |
| e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3},\quad a\in\mathbb{R}$ |
| g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}\cdot2^n}{(n+1)^{n^2}}$ | h) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}},\quad \alpha>0,\beta>0$ |
| i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2\cos n\alpha}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}},\quad \alpha\in\mathbb{R}$ | k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na}{(1-a^2)^n},\quad a\in\mathbb{R},0<\lvert a\rvert\neq1$ |

**6) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau**

| | | |
|---|---|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$ | b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ | c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{xn^x}$ |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{2^{nx}}$ | e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$ |
| g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^{\alpha}}\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n,\quad \alpha\in\mathbb{R}$ | h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^nx^n}\right)$ | |

| | | |
|---|---|---|
| i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^{n^n}}$ | k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5}(x+2)^{1-2n}$ | |

**7) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều trên các tập tương ứng**

| | |
|---|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ trên $\mathbb{R}$ | b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ trên [-1,1] |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ trên $[0,+\infty)$ | d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ trên $\mathbb{R}$ |

**8) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau**

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^2}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(x-1)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n+5}}{n^2+4}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^{2n}}{n2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2+1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x+3)^n$

**9) Tính tổng của các chuỗi sau**

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)}, \quad x\in(-3,3)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 3^{n-1}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, \quad x\in(-1,1)$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{n^2+n}\right)x^n, \quad x\in(-1,1)$

**10. Khai triển thành chuỗi Maclaurin**

a) $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2-4x+3}$ b) $f(x)=\sin 3x+x\cos 3x$

c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ d) $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$

**11.** a) Khai triển $f(x)=\sqrt{x}$ thành chuỗi lũy thừa của x - 4

b) Khai triển $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{3}$ thành chuỗi lũy thừa của x -1

c) Khai triển $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ thành chuỗi lũy thừa của x + 4

d) Khai triển $f(x)=\ln x$ thành chuỗi lũy thừa của $\dfrac{1-x}{1+x}$

**12) a) Khai triển Fourier các hàm số sau**

(1) $f\left(x\right)=|x|,\quad |x|< 1$, bằng cách kéo dài $f$ thành hàm tuần hoàn với chu kỳ 2.

(2) $f\left(x\right)=2x,\quad 0<x< 1$, bằng cách kéo dài $f$ thành hàm chẵn trên (-1,1), tuần hoàn chu kỳ 2. Nếu kéo dài $f$ thành hàm lẻ trên (-1,1), tuần hoàn chu kỳ 2, thì dạng của khai triển Fourier sẽ như thế nào?

(3) $f\left(x\right)=10-x,\quad 5<x<15$, bằng cách kéo dài $f$ thành hàm tuần hoàn với chu kỳ 10.

**b)** Cho $f\left(x\right)=x^2$ trên $[-\pi,\pi]$. Hãy khai triển Fourier của hàm $f\left(x\right)$, sau đó tính tổng các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

## II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

### 1. Phương trình phân li

| | |
|---|---|
| a) $\tan ydx-x\ln xdy=0$ | b) $y'\cos x=y$ |
| c) $\dfrac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\dfrac{3y+2}{x+1}y'$ | d) $y'=a\cos y+b\ \left(b>a>0\right)$ |
| e) $y'-y^2-3y+4=0$ | f) $y'\left(2x+y\right)=1$ |
| g) $y'=\sin\left(y-x-1\right)$ | h) $y'=\dfrac{x-y-1}{x-y-2}$ |
| i) $x^2\left(y^3+5\right)dx+\left(y^3+5\right)y^2dy,\quad y\left(0\right)=1$<br>k) $xydx+\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}dy=0,\quad y(\sqrt{8})=1$ | |

### 2. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp một

| | |
|---|---|
| a) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$ | b) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$ |
| c) $x^2 y' + y^2 + xy + x^2 = 0$ | d) $(x+2y)dx - xdy = 0$ |
| e) $xydy - y^2dx = \left(x+y\right)^2 e^{-\frac{y}{x}}dx$ | f) $\left(x-2y+3\right)dy + \left(2x+y-1\right)dx = 0$ |
| g) $xy' = y\ln\frac{y}{x}$, $\quad y\left(1\right) = 1$ | h) $\left(\sqrt{xy} - x\right)dy + ydx = 0, \quad y\left(1\right) = 1$ |

**3. Phương tình vi phân tuyến tính cấp một**

| | |
|---|---|
| a) $y' - 2xy = 1 - 2x^2$ | b) $y' = \frac{1}{x}\left(2y + xe^x - 2e^x\right)$ |
| c) $x\left(1+x^2\right) y' + y = \arctan(x)$ | d) $y'\left(x+y^2\right) = y$ |
| e) $\left(2xy+3\right)dy - y^2dx = 0$ | f) $\left(1+y^2\right)dx = \left(\arctan y - x\right)dy$ |
| g) $y' + y\cos x = \sin x \cos x, \quad y\left(0\right) = 0$ | h) $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, \quad y(0) = 0$ |

**4. Phương trình Bernoulli**

| | |
|---|---|
| a) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$ | b) $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$ |
| c) $y' - 2y\tan x + y^2\sin^2 x = 0$ | d) $ydx + \left(x + x^2y^2\right) dy = 0$ |
| e) $3dy + \left(1+3y^3\right)y\sin xdx = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ | |
| f) $\left(y^2 + 2y + x^2\right)y' + 2x = 0, \quad y(1) = 0$ | |

**5. Phương trình vi phân toàn phần**

a) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

b) $\left(y + \frac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \frac{3}{y^2}\right)dy = 0$

c) $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$

d) $e^y dx - (xe^y - 2y)dy = 0, \quad y(1) = 0$

**6) Tìm thừa số tích phân $\alpha(y)$ để phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần và giải phương trình đó với $\alpha$ tìm được**

$$\left(2xy^2-3y^3\right)dx+\left(y-3xy^2\right)dy=0$$

**7) Tìm thừa số tích phân $\alpha(x)$ để phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần và giải phương trình đó với $\alpha$ tìm được**

$$\left[\frac{1}{x+y}-\ln(x+y)\right]dx+\frac{1}{x+y}dy=0$$

**8) Giải các phương trình sau**

a) $y'=\sqrt{4x+2y-1}$

b) $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0,\quad y(0)=1$

c) $y'-\dfrac{y-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$

d) $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y},\quad y(0)=\dfrac{9}{4}$

**9) Chứng minh rằng**

a) $y=x\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt$ là nghiệm của phương trình $xy'-y=x^2e^{x^2}$

b) $y=x+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$ là nghiệm của phương trình $\left(1-x\right)dy=\left(1+x-y\right)dx$

**10) Giải các phương trình sau**

a) $y''+3y'-10y=xe^{-2x}$ b) $y''+y=4x\sin x$. c) $y''+y=xe^x+3e^{-x}$

d) $y''-4y'-8y=e^{2x}+\sin 2x$ e) $y''+y=2\cos x\cos 2x$. f) $y''-2y'+y=\sin x+\sinh x$

**11) Giải các phương trình sau**

a) $y''-y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

b) $y''+y'=\tan x$

c) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$

**12)** Giải phương trình $(2x-2^2)y''+2(x-1)y'-2y=-2$ biết nó có hai nghiệm riêng $y_1=x$ và $y_2=1$

**13)** Giải phương trình $(x^2+1)y''+2xy'+\dfrac{4y}{x^2+1}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ với phép biến đổi $x=\tan t$.

**14) Giải các phương trình sau**

a) $y''-2my'+m^2y=(x-1)e^{mx}+2\sin x,\quad m\in\mathbb{R}$

b) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}+(2x-1)e^x+2$

**15)** Một vật thể với trọng lượng 2 N, được treo vào lò xo làm lò xo dãn ra thêm 6cm ở vị trí cân bằng. Ta kéo vật thể đó xuống thêm 3 cm nữa và thả ra để nó dao động tự do và không tắt dần: a) Xác định hằng số tỷ lệ *k* của lò xo trong định luật Hook.

b) Xác định vị trí *u* của vật thể ở bất kỳ thời gian *t* nào.

c) Tìm tần số, chu kỳ, và biên độ của dao động.

**16)** Một vật thể với trọng lượng 2 N được treo vào một lò xo và kéo dài lò xo thêm đoạn 10cm đến vị trí cân bằng. Vật thể được truyền một vận tốc ban đầu là 3cm/sec và bắt đầu di chuyển từ vị trí cân bằng trong một môi trường chịu ảnh hưởng lực cản nhớt là 2N mỗi khi vận tốc vật thể là 4cm/sec.

a) Hãy lập bài toán giá trị ban đầu mô tả chuyển động của vật thể

b) Giải bài toán giá trị ban đầu đó.

c) Giả sử có một ngoại lực *f* tác động vào vật thể với $f(t) = 2\cos \omega t$. Viết phương trình mô tả dao động với ngoại lực và giải phương trình này. Tìm giá trị của tần số $\omega$ để biên độ giao động là lớn nhất.

**17)** Một một vật thể với trọng lượng 4 N kéo dài một lò xo 1,5 cm về vị trí cân bằng. Vật thể được được kéo thêm 2 cm theo hướng dương kể từ vị trí cân bằng của nó và được thả ra mà không có vận tốc ban đầu. Giả sử rằng không có sự tắt dần và có ngoại lực là 2 cos 3t (N).
(a) Xây dựng bài toán giá trị ban đầu mô tả chuyển động của vật thể.
(b) Giải bài toán giá trị ban đầu ở trên
(c) Nếu ngoại lực được thay bằng một lực 4 sin ωt, tìm giá trị của tần số ω để cộng hưởng xảy ra.

**18) Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = x + y + z \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x - y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{x - y} \end{cases}$

**III. Phép biến đổi Laplace:**

**1. Sử dụng định nghĩa, tìm trực tiếp biến đổi Laplace của các hàm số sau**

a) $f(t) = t$ b) $f(t) = e^{3t+1}$ c) $f(t) = \sinh(kt)$ d) $f(t) = \sin^2 t$

**2. Sử dụng bảng phép biến đổi Laplace, tìm phép biến đổi Laplace của hàm số sau**

| | | |
|---|---|---|
| a) $f(t) = \sqrt{t + 3t}$ | b) $f(t) = t - 2e^{3t}$ | c) $f(t) = 1 + \cosh(5t)$ |
| d) $f(t) = \cos^2(2t)$ | e) $f(t) = (1 + t)^3$ | f) $f(t) = te^t$ |
| g) $f(t) = \sin 3t \cos 3t$ | h) $f(t) = \sinh^2 3t$ | |

**3. Sử dụng bảng phép biến đổi Laplace, tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm số sau**

a) $F(s) = \dfrac{3}{s^4}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^{5/2}}$ c) $F(s) = \dfrac{3}{s - 4}$

d) $F(s) = \dfrac{5 - 3s}{s^2 + 9}$ e) $F(s) = \dfrac{10s - 3}{25 - s^2}$ f) $F(s) = 2s^{-1}e^{-3s}$

**4. Tìm phép biến đổi Laplace nghịch đảo của các hàm số sau**

a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s - 3)}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2 + 4)}$ c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2 + 1)}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2 - 1)}$ e) $F(s) = \dfrac{1}{s(s + 1)(s + 2)}$

**5. Chứng minh rằng**

a) $\mathrm{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n}{s-a}\ \mathrm{L}\{t^{n-1}e^{at}\}$ b) $\mathrm{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad n = 1,2,3...$

c) $\mathrm{L}\{t\sinh kt\} = \dfrac{2sk}{(s^2-k^2)}$

**6. Áp dụng Định lí phép tịnh tiến để tìm phép biến đổi Laplace của hàm số sau**

a) $f(t) = t^4 e^{\pi t}$ b) $f(t) = e^{-2t}\sin 3\pi t$ c) $f(t) = e^{\frac{-t}{2}}\cos 2\left(t - \dfrac{\pi}{8}\right)$

**7. Áp dụng định lí phép tịnh tiến để tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau**

a) $F(s) = \dfrac{3}{2s-4}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+4}$ c) $F(s) = \dfrac{3s+5}{s^2-6s+25}$

**8. Sử dụng các phân thức đơn giản để tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau**

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2-4}$ b) $F(s) = \dfrac{5-2s}{s^2+7s+10}$ c) $F(s) = \dfrac{1}{s^3-5s^2}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{s^4-16}$ e) $F(s) = \dfrac{s^2-2s}{s^4+5s^2+4}$

**9. Dùng các định lí vi, tích phân của phép biến đổi Laplace để tìm phép biến đổi Laplace của các hàm sau**

a) $f(t) = t\sin 3t$ b) $f(t) = te^{2t}\cos 3t$

c) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ d) $f(t) = \dfrac{e^{3t}-1}{t}$

**10. Áp dụng định lí tích chập để tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm sau**

a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+9)^2}$

c) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$ d) $F(s) = \dfrac{s}{(s-3)(s^2+1)}$

**11. Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải bài toán giá trị ban đầu**

a) $x''+4x=0, \quad x(0)=5, \quad x'(0)=0$ b) $x''-x'-2x=0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=2$

c) $x''+x=\sin 2t, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$ d) $x''+x=\cos 3t, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=0$

e) $x''+4x'+3x=1, \quad x(0)=0=x'(0)$ f) $x''+3x'+2x=t, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=2$

g) $x''+4x'+13x=te^{-t}, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=2$. h) $x''+6x'+18x=\cos 2t, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=-1$

**12. Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải hệ phương trình vi phân tuyến tính sau**

c) $\begin{cases} x''+x'+y'+2x-y=0, & x(0)=y(0)=1 \\ y''+x'+y'+4x-2y=0, & x'(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x''+2x+4y=0, & x(0)=y(0)=0 \\ y''+x+2y=0, & x'(0)=y'(0)=-1 \end{cases}$

**13. Giải phương trình vi phân cấp cao với điều kiện ban đầu**

a) $x''+6x'+25x=0, \quad x(0)=2, \quad x'(0)=3$. b) $x''-4x=3t, \quad x(0)=x'(0)=0$

c) $x^{(3)}+x''-6x'=0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=x''(0)=1$

d) $x^{(4)}+x=0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=x''(0)=0, \quad x^{(3)}(0)=1$

e) $x^{(4)}+8x''+16x=0, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0, \quad x^{(3)}(0)=1$

**14. Giải bài toán với giá trị ban đầu**

$$mx''+cx'+kx=f(t), \quad x(0)=x'(0)=0$$

a) $m=1, \quad k=4, \quad c=0, \quad f(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t<\pi \\ 0, & t\ge \pi \end{cases}$

b) $m=1, \quad k=9, \quad c=0, \quad f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0\le t<2\pi \\ 0, & t\ge 2\pi \end{cases}$

c) $m=1, \quad k=4, \quad c=4, \quad f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<2 \\ 0, & t\ge 2 \end{cases}$