

Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội
Viện Toán ứng dụng và Tin Học

ĐỀ CƯƠNG BÀI TẬP HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG

Giới hạn dãy số

Tính giới hạn của dãy sau:

$$1. u_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

$$2. u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

$$3. x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$4. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1+\sqrt{2n+1}}} \right)$$

$$5. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$6. u_1 = 13; u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$$

$$7. u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - u_n^2$$

$$8. u_1 = 1, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

$$9. u_1 = \sqrt[k]{5}, u_{n+1} = \sqrt[k]{5u_n}; k \in \mathbb{N}$$

$$10. u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$11. x_n = \frac{a^n}{n!}$$

$$12. u_n = \frac{\ln(n^2+1+n)}{\ln(n^{10}+n-1)}$$

$$13. x_n = 0, \underbrace{11\dots1}_n$$

$$14. x_n = 0, \underbrace{454545\dots45}_{n \text{ 45}}$$

$$15. x_n = \left(\frac{2n-1}{5n+1} \right)^{n^2}$$

$$16. x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$17. x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$18. x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Chứng minh dãy sau hội tụ

$$19. x_n = \left(1 - \frac{2}{2 \cdot 3} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) \dots \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$20. x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$21. x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$22. x_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$23. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \end{cases} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$24. \text{ Cho dãy } x_n, y_n \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = b \\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \end{cases} . \text{ Tìm } \lim x_n, y_n .$$

$$25. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \end{cases} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$26. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } u_1 = 1, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$27. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{4}{3} u_n - u_n^2 . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$28. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } u_1 = 13; u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$29. \text{ Cho } \lim x_n = a, \text{ tìm } \lim \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} .$$

$$30. \text{ Cho } \lim x_n = a, x_n > 0, \text{ tìm } \lim \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} .$$

Khái niệm hàm số

Tìm tập xác định

$$31. y = \arcsin \frac{2x}{x+1}$$

$$33. y = \arcsin \left(\log \left(\frac{x}{10} \right) \right)$$

$$32. y = \log(1 - 2 \cos x)$$

$$34. \text{ Cho } f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{2-x} . \text{ Tìm TXĐ của } f \circ g, g \circ f, g \circ g, f \circ f .$$

35. Cho $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$. Tìm $f(x)$

Hàm nào sau đây là hàm chẵn, hàm lẻ:

36. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

38. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

37. $f(x) = 3x - x^3$

39. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

40. Hàm nào sau đây là hàm tuần hoàn, xác định chu kì cơ sở (nếu có)

41. $f(x) = A \sin kx + B \cos kx$

44. $f(x) = \sin^2 x$

42. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$

45. $f(x) = \sin(\sqrt{2x}) + \sin x$

43. $f(x) = \sin x^2$

46. Liệu có hàm tuần hoàn không có chu kì cơ sở hay không?

Giới hạn của hàm số. Hàm liên tục.

Tính giới hạn:

47. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan^2 x)^{1/\sin^2(2x)}$

55. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tanh\left(\frac{1}{x}\right)$

48. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \arctan 3x + 3x^2}{\ln(1+3x + \sin^2 x) + xe^x}$

49. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cosh x)^{1/(1-\cos x)}$

57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+10x} - \sqrt[3]{1+3x}}{\arcsin(3x+x^2) - \sinh(2x+x^3)}$

50. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$

58. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln\frac{x}{2}\right)$

51. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}$

59. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$

52. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x}\right)^x$

60. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x}$

53. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+14+x}}{\sqrt{x^2-2+x}}$

61. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - 3 \arcsin 4x}{\sin 5x - 6 \arctan 7x}$

54. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+14+x}}{\sqrt{x^2-2+x}}$

Cho $x \rightarrow +\infty$, chứng minh rằng:

62. $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$

64. $\ln x = o(x^\varepsilon), \varepsilon > 0$

63. $\frac{\arctan x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

65. $x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Tìm các điểm gián đoạn của hàm số, xác định loại điểm gián đoạn:

$$66. f(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$$

$$67. f(x) = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

$$68. f(x) = 3^{x/(1-x^2)}$$

$$69. f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$70. f(x) = \frac{|x|}{\arctan x}$$

Tìm a để hàm liên tục:

$$75. f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0, n \in \mathbb{N} \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

$$71. y = \frac{x+1}{\arctan(1/x)}$$

$$72. f(x) = \ln \ln(1+x^2)$$

$$73. f(x) = \frac{3^{1/x} + 2^{1/x}}{3^{1/x} - 2^{1/x}}$$

$$74. y = (\sin x) \sin \frac{1}{x}$$

$$76. y = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Chứng minh phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$77. x \cdot 2^x = 1$$

$$78. x \cdot e^x = 2$$

$$79. x^2 \cdot \arctan x = a; a \neq 0$$

$$80. x = \alpha \sin x + 1, 0 < \alpha < 1$$

81. CMR: hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục trên $(0,1)$ nhưng không liên tục đều trên khoảng đó.

82. CMR: hàm số $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ liên tục và bị chặn trên $(0,1)$ nhưng không liên tục đều trên khoảng đó.

83. CMR: hàm số $f(x) = \sin x^2$ liên tục và bị chặn trên $(-\infty, +\infty)$ nhưng không liên tục đều trên khoảng đó.

84. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước: $f(x) = \frac{x}{4-x^2}, -1 \leq x \leq 1$

85. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước: $f(x) = \ln x, 0 < x < 1$

86. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước: $f(x) = \frac{\sin x}{x}, 0 < x < \pi$

87. Chứng minh phương trình sau có vô số nghiệm: $x \sin x = 1/2$

88. Chứng minh phương trình sau có đúng hai nghiệm: $10^{x-1} = x$

89. Chứng minh phương trình sau có đúng hai nghiệm: $2^x = 4x$

Đạo hàm. Vi phân.

$$90. \text{Tính } f'(0) \text{ biết } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

91. Tính $f'(0^+)$; $f'(0^-)$ biết $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

92. Tính $f'(0)$ biết $f(x) = x^2 + 3|x| + 2$

93. Tính $f'(x)$ biết

$$f(x) = (x + 2 \sin x)^{\cot x + \sin^2 x}$$

94. Tính $f'(x)$ biết $f(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{x^3 \sin^7 x}}$

95. Tính $f^{(n)}(x)$ biết: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

96. Tính $f^{(100)}(x)$ biết: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$

97. Tính $f^{(n)}(x)$ biết: $f(x) = \sin^2 x$

98. Tính $f^{(100)}(x)$ biết:

$$f(x) = (x^2 + 1) \ln(x + 1)$$

99. $f^{(100)}(0)$; $f^{(101)}(0)$ biết $f(x) = \arctan x$

100. Tính $f^{(n)}(x)$ biết:

$$f(x) = x \ln \frac{3+x}{3-x}$$

101. Tìm: $\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$

103. Tìm: $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$

102. Tìm: $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

104. Tìm: $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)}$

105. CMR: hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ có 3 điểm uốn thẳng hàng.

106. CMR: $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2} \right)^n$, $x \neq y > 0$, $n > 1$

107. CMR: $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{(x+y)/2}$, $x \neq y$

108. Tìm trên đường cong $y = x^3$ điểm có tiếp tuyến song song với dây cung nối 2 điểm $A(-1, -1), B(2, 8)$.

109. Kiểm tra tính đúng đắn của định lý Rolle đối với hàm số: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

110. Giải thích tại sao định lý Cô-si không đúng với 2 hàm số: $f = x^2$, $g = x^3$ trên $[-1, 1]$.

111. CMR: tất cả các nghiệm thực của đa thức $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$ đều thuộc $(-1, 1)$.

112. Cho đa thức Tre-bu-sep: $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. CMR: tất cả các không điểm của đa thức trên đều dương.

113. CMR: tất cả các nghiệm của đa thức $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ đều là số thực.

114. CMR: $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

115. CMR: $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

116. CMR: $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, $0 < b < a$

117. CMR: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x > 0$

118. CMR: $(x^a + y^a)^{1/a} > (x^b + y^b)^{1/b}$, $x, y > 0$, $b > a > 0$

119. CMR: $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

120. CMR: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$

121. Xác định giá trị trung gian c khi áp dụng định lý Lagrange vào hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & : x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & : x > 1 \end{cases} \text{ trên đoạn } [0, 2].$$

Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurint đến cấp n :

122. $f(x) = \frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}}$, $n = 3$

129. $f(x) = x \cosh 3x$, $n = 5$

123. $f(x) = \ln \frac{2-3x}{3+2x}$, $n = 3$

130. $f(x) = x \cdot \cosh^2 x$, $n = 5$

124. $f(x) = \frac{x-4}{x^2-5x+6}$, $n = 3$

131. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2-x^2}}$, $n = 8$

125. $f(x) = \frac{x^2+5x-5}{x^2+x-2}$, $n = 3$

132. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$, $n = 9$

126. $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$, $n = 4$

133. $f(x) = e^{x \cos x}$, $n = 4$

127. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $n = 5$

134. $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2-x^3}$, $n = 5$

128. $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}$, $n = 4$

135. $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$, $n = 6$

Tìm khai triển Taylor tại x_0 đến cấp n

136. $f(x) = (x^2-1)e^{2x}$, $x_0 = -1$, $n = 3$

138. $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 4$

137. $f(x) = \ln(2x+1)$, $x_0 = 1/2$, $n = 3$

$$139. \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1}, x_0 = 1, n = 3$$

$$140. \quad f(x) = e^{x^2+2x-1}, x_0 = -1, n = 4$$

$$141. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, x_0 = 1, n = 4$$

Ứng dụng đạo hàm, tính giới hạn:

$$143. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\tan^2 x}$$

$$144. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}$$

$$145. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x^2}{x \cos x - \sin x}$$

$$146. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arctan(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$147. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\arcsin x - \ln(1+x)}$$

$$148. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x}$$

$$149. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x)^{\tan x}$$

$$150. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln(\sinh x)}$$

$$151. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x - 1) \ln x$$

$$152. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$$

$$153. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$$

$$154. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^3}$$

$$155. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right)$$

$$156. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x \arctan x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$157. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

$$158. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$$

$$159. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\tanh x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

$$160. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$$

$$142. \quad f(x) = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x+5}}, x_0 = 2, n = 5$$

$$161. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{1/x}$$

$$162. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$163. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

$$164. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arcsin x}{\tan x - \sin x}$$

$$165. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$$

$$166. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$$

$$167. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} + \ln(1-x) - 1}{2 - \sqrt{4+x^3}}$$

$$168. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{\arcsin x - \sin x}$$

$$169. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\tan x} - \sin^2 x - x}{x + x^3 - \tan x}$$

$$170. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - \ln(1+x^2) - \arcsin x^3}{x \sin x - x^2}$$

$$171. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^3} - \cos x^4}{\tan x - x}$$

$$172. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/(1-x)} - \sinh x - \cos x}{\sqrt[6]{1+x} + \sqrt[6]{1-x} - 2}$$

$$173. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh 2x - (1+3x)^{-1/3} - x}{x^2/2 + \ln(1+\tan x) - \arcsin x}$$

$$174. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - \arcsin x}{\sinh(x-x^2) - \ln \sqrt{1+2x}}$$

$$175. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arctan x - \tan x}{e^{\sinh x} - (1+2x)^{1/2} - x^2}$$

$$176. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - xe^x}{x\sqrt{1-x^2} - \tan x}$$

$$177. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sin x - x \cos x}$$

$$178. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{x + \tan x - \sin 2x}$$

$$179. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x\sqrt{1+x} - 1}{\sin x \cosh x - \sinh x}$$

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số cho bởi tham số sau:

$$183. \quad x = t^3 + 2t^2 + t, y = -2 + 3t - t^3$$

$$184. \quad x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - 6 \arctan t$$

$$185. \quad x = \frac{t^3}{1+t^2}, y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$$

$$186. \quad x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$$

$$187. \quad x = \cos t + \ln \tan(t/2), y = \sin t$$

$$188. \quad x = \frac{t^2 + 1}{t}, y = \frac{t^3 + 1}{t^2}$$

$$180. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8-x^4} - 2}$$

$$181. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{1+x^3} - \sin 1}{\sqrt[5]{1-2x \ln \cos x} - 1}$$

$$182. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt[3]{1-4x^2}}}{(1/x) \arcsin 2x - 2 \cosh x^2}$$

$$189. \quad x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t^2 - 1}{t}$$

$$190. \quad x = \frac{t^2}{t^2 - 1}, y = \frac{t^2 + 1}{t + 2}$$

$$191. \quad x = \frac{1}{t - t^2}, y = \frac{1}{t - t^3}$$

$$192. \quad x = e^t - t, y = e^{2t} - 2t$$

$$193. \quad x = \frac{e^t}{t}, y = (t-1)^2 e^t$$

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số cho trong tọa độ cực sau:

$$194. \quad r = 2 + \cos \varphi$$

$$195. \quad r = 1 - 2 \cos \varphi$$

$$196. \quad r = \cos 3\varphi$$

$$197. \quad r = 1 + \tan \varphi$$

$$198. \quad r = \frac{2}{\cos \varphi} - 1$$

$$199. \quad r = \tan 2\varphi$$

$$200. \quad r = 1 + \tan \varphi$$

$$201. \quad r = 2(1 - \cos \varphi)$$

Tích phân.

Tính nguyên hàm bằng công thức cơ bản:

$$202. \quad \int \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{x\sqrt{x}} dx$$

$$203. \quad \int \frac{4x^2 - 9x + 10}{2x - 1} dx$$

$$204. \quad \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 11x + 4}{(x+1)^{30}} dx$$

$$205. \quad \int \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 9}{(x-2)^{15}} dx$$

$$206. \quad \int \frac{dx}{(2x^2 + 5)(x^2 - 3)}$$

$$207. \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Tính nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến

$$208. \quad \int x^4 \sqrt[9]{(2x^5 + 3)^4} dx$$

$$209. \quad \int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt[7]{(2x+1)^4}} dx$$

$$210. \quad \int \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$211. \quad \int \frac{x^3}{x - \sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$212. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$213. \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$214. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Tính nguyên hàm bằng phương pháp tích phân từng phần:

$$217. \int 3^x \cos x dx$$

$$218. \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$219. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

$$220. \int (\arcsin x)^2 dx$$

$$221. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$$

Tính tích phân:

$$225. \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$$

$$226. \int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$227. \int \sqrt{x^2+2x+5} dx$$

$$228. \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$229. \int \frac{3x+5}{(x^2+4x+5)^2} dx$$

$$230. \int \frac{dx}{x(x^7+1)}$$

$$231. \int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} dx$$

$$232. \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx$$

$$233. \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}$$

$$215. \int \sqrt{a^2+x^2} dx$$

$$216. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$222. \int \cos^2(\ln x) dx$$

$$223. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$224. \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$234. \int x\sqrt{x^2+x+1} dx$$

$$235. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^2 x}}$$

$$236. \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$$

$$237. \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

$$238. \int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x+\cos x} dx$$

$$239. \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$240. \int x \arccos(5x+1) dx$$

$$241. \int \frac{dx}{\cos^n x}$$

$$242. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Tính giới hạn của các dãy sau:

$$243. \quad \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

$$244. \quad \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$$

$$245. \quad \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2}$$

$$246. \quad \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

$$247. \quad \sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{n+1/k}$$

$$248. \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

Tính các đạo hàm sau:

$$249. \quad \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right)$$

$$250. \quad \frac{d}{dx} \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{t^2} dt \right)$$

$$251. \quad \frac{d}{dx} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3 dt \right)$$

$$252. \quad \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \right)$$

Tính giới hạn:

$$253. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$$

$$254. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\tan x}$$

$$255. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$$

Tính các tích phân sau:

$$256. \quad \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$257. \quad \int_1^e \frac{\cos(\ln x) dx}{x}$$

$$258. \quad \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

$$259. \quad \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx$$

$$260. \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} dx$$

$$261. \quad \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} dx$$

$$262. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx$$

$$263. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

$$264. \int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$$

$$265. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$266. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$$

$$267. \int_0^{1/3} \cosh^2 3x dx$$

$$268. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$$

$$274. \text{Xác định dấu của tích phân sau: } \int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

$$275. \text{Xác định dấu của tích phân sau: } \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$276. \text{Xác định dấu của tích phân sau: } \int_{1/2}^1 x^2 \ln x dx$$

$$277. \text{So sánh } \int_0^1 e^{-x} dx, \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$278. \text{CMR: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$$

$$279. \text{CMR: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0$$

$$269. \int_0^{\pi/2} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

$$270. \int_0^1 \frac{\ln(1+x) dx}{(1+x^2)}$$

$$271. \int_{1/2}^2 (1+x-1/x) e^{x+1/x} dx$$

$$272. \int_0^1 \arcsin \sqrt{x} dx$$

$$273. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

Ứng dụng tích phân xác định:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$280. \begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y^3 = x^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 282. \quad x^4 + y^4 = x^2 + y^2 \\ 283. \quad r = 2 + \cos \varphi \end{array}$$

$$281. \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 = 12(y - 1) \end{cases}$$

Tính độ dài cung:

$$284. \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi \quad \begin{array}{l} 286. \quad r = a(1 + \cos \varphi) \\ 287. \quad \begin{cases} y = \arcsin(e^{-x}) \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

$$285. \quad r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$$

Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được

$$288. \quad \text{Khi quay } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ quanh Ox hoặc Oy.}$$

$$289. \quad \text{Khi quay } \begin{cases} y = e^x \\ x = 0, y = 0 \end{cases} \text{ quanh Ox hoặc Oy.}$$

$$290. \quad \text{Khi quay } \begin{cases} y = \sin^2 x \\ x = 0, x = \pi \end{cases} \text{ quanh Ox.}$$

$$291. \quad \text{Khi quay } r = a \cos^2 \varphi \text{ quanh trục gốc.}$$

Tính diện tích xung quanh của vật thể tròn xoay thu được:

$$292. \quad \text{Khi quay } \begin{cases} y = \tan x \\ x = 0, x = \pi / 4 \end{cases} \text{ quanh Ox.}$$

$$293. \quad \text{Khi quay } x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \text{ quanh Ox.}$$

$$294. \quad \text{Khi quay } x^2 + (y - 2)^2 = 1 \text{ quanh Ox.}$$

Tích phân suy rộng:

Tính tích phân suy rộng:

$$\begin{array}{l} 295. \quad \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} \\ 296. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^5 + x^{10}}} \\ 297. \quad \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx \\ 298. \quad \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x + 1)(x - 2)} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} 299. \quad \int_2^{+\infty} \frac{(x^2 + 1)}{x(x - 1)^3} dx \\ 300. \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x - 1)^2 (x + 1)^3} \\ 301. \quad \int_1^{+\infty} \frac{x + 3}{x(x^2 + x + 1)} dx \\ 302. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

$$303. \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2(x)} dx$$

$$304. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^6 + 3)}$$

$$305. \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + \sqrt{e^x}} dx$$

$$306. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx$$

$$307. \int_0^{+\infty} \frac{2^x}{4^x + 1} dx$$

$$308. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

$$309. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x}$$

$$310. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{2^x}$$

$$311. \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3 - 1}$$

$$312. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$313. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}$$

$$314. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Xét sự hội tụ:

$$326. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x + \ln x}}$$

$$327. \int_1^{+\infty} \frac{3xdx}{2x^3 + \sin 3x}$$

$$315. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$316. \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 12}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$317. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

$$318. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x - 2}}$$

$$319. \int_0^1 \frac{dx}{(2 - x)\sqrt{1 - x}}$$

$$320. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$321. \int_0^1 \frac{(2 - \sqrt[3]{x} - x^3) dx}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$322. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4 - x)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$323. \int_{-2}^2 \frac{x^4 dx}{(1 + x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$324. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$$

$$325. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$328. \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{2x^2 + 2 \ln x}$$

$$329. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x + 1)\sqrt{x + 1}}$$

$$330. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$331. \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$332. \int_1^{+\infty} \left(e^{1/x^2} - \cos \frac{1}{x} \right) dx$$

$$333. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$334. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} dx$$

$$335. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x} dx$$

$$336. \int_1^{+\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x^3}{e^{3/x} - 1} dx$$

Tim α để tích phân hội tụ:

$$343. \int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{e^{3/x} - 1}{\alpha} \right) dx$$

$$344. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan 3x}{(2+x)^\alpha} dx$$

$$345. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x^\alpha} dx$$

$$346. \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x + x^\alpha} dx$$

$$347. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x + 2x^\alpha} dx$$

$$353. \text{Tim } \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$337. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + \ln 2x}$$

$$338. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$$

$$339. \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[5]{x^3}) dx}{e^x - 1}$$

$$340. \int_0^3 \frac{2x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$341. \int_0^1 \frac{5x^3 + \sqrt{x}}{\tan x - x} dx$$

$$342. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^2}$$

$$348. \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{e^{x^\alpha} - 1} dx$$

$$349. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + \ln(1+x^2)) x^{5\alpha}}$$

$$350. \int_1^{+\infty} \frac{(x^3 - 1)^\alpha}{\sqrt{x^7 - x^5 + 1}} dx$$

$$351. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^3 + \sin x) x^\alpha}$$

$$352. \int_0^1 \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1+x}}{\cosh x - \cos x} dx$$

354. Tìm $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}$
355. Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ, liệu có thể suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$?
356. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
357. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ: $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$
358. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ: $\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx$

Không gian Metric.

359. Cho không gian metric (X, d) . Ta định nghĩa: $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$
- CMR: d_1 là một metric
 - CMR: $x_n \rightarrow x$ theo d_1 khi và chỉ khi $x_n \rightarrow x$ theo d
 - CMR: (X, d) đầy đủ khi và chỉ khi (X, d_1) đầy đủ
2. Cho 2 không gian metric (X_1, d_1) và (X_2, d_2) . Trên $X = X_1 \times X_2$ ta định nghĩa:
- $$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$
- CMR (X, d) là không gian metric
 - Cho (X_1, d_1) và (X_2, d_2) đầy đủ, cmr (X, d) là không gian metric đầy đủ.
3. Cho $X = C_{[0,1]}$, xét 2 metric $d(x, y) = \sup_{[0,1]} |x(t) - y(t)|$; $d_1(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$.
- CMR: $x_n \xrightarrow{d} x$ suy ra $x_n \xrightarrow{d_1} x$
 - Điều ngược lại có đúng không?
 - CMR (X, d_1) không đầy đủ.
4. CMR trong không gian metric ta có: $\overline{A \subset B} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}}$
5. CMR trong không gian metric ta có: $\overline{A \cup B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
6. Cho $X = C_{[0,1]}$, xét metric $d(x, y) = \sup_{[0,1]} |x(t) - y(t)|$. Giả sử: $x_0 \in C_{[a,b]}$. Xét các tập sau:
- $$M_1 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) > x_0(t), t \in [a, b]\}$$
- $$M_2 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) \geq x_0(t), t \in [a, b]\}$$

$$M_3 = \{x \in C_{[a,b]} : \exists t \in [a,b]: x(t) \geq x_0(t)\}$$

CMR: M_1 mở, M_2, M_3 đóng M_2, M_3 .

7. Trong $C^1_{[a,b]}$ định nghĩa: $p_1(x) = |x(a)| + \sup_{[a,b]} |x'(t)|$, $p_2(x) = \sup_{[a,b]} |x(t)|$,
 $p_3(x) = \sup_{[a,b]} \{ |x(t)| + |x'(t)| \}$.
- a. CMR: p_1, p_2, p_3 là các chuẩn trên $C^1_{[a,b]}$
- b. CMR: p_2, p_3 không tương đương nhau
- c. CMR: p_1, p_3 không tương đương nhau

Hàm nhiều biến

Tìm miền xác định:

8. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

9. $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$

10. $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

11. $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$

12. Tìm giới hạn hoặc chứng minh giới hạn không tồn tại:

13. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right)$

14. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$

15. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$

16. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

17. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

18. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$

19. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1 + xy}}$

20. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y} + 9 - 3}$

29.

21. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

22. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 6} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt[6]{x^4 + y^4 + 2(1 + x^2y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2}}$

23. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$

24. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(x^2 + y^2)$

25. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x - 2xy - 4y}$

26. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(x^2 + y^2)$

27. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + xy)^{1/x^2+y^2}$

28. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\cos \sqrt{x^2 + y^2} \right)^{-1/(x^2+y^2)}$

Hàm liên tục:

Khảo sát tính liên tục của hàm sau:

$$30. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$33. u = \begin{cases} \frac{\sin(xyz)}{z}, & z \neq 0 \\ \frac{z}{x^2}, & z = 0 \end{cases}$$

$$31. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$34. z = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ m, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$32. z = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, & x + y \neq 0 \\ 3, & x + y = 0 \end{cases}$$

Đạo hàm - vi phân:

35. Cho hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$, tính $f'_x(1, 1)$, $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$.

36. Cho $f(x, y) = \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2} dt$, tính $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

37. Cho $f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & \text{neu } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{neu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$. Tính $f'_x(0, 0)$.

38. CMR hàm $f(x, y) = e^x \sin y$ thỏa mãn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

39. CMR hàm $u(x, t) = \sin(x - at)$ thỏa mãn $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

40. CMR hàm $u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$ thỏa mãn $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

41. Cho $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{neu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{neu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$. Tìm $f''_{xx}(0, 0)$.

42. Cho $u(x, y) = (2x + 3y) \ln(x + 2y)$. Tìm $\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(1, 2)$.

43. Cho $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$. Tìm $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$. Tìm $df(x, y)$.

44. Cho $f(x, y) = e^{xy}$. Tìm $d^2 f(1, 1)$.

45. Cho $f(x, y) = \frac{y}{x}$. Tìm $d^2 f(1, 1)$.

46. Dùng vi phân cấp 1, tính gần đúng $A = \sqrt{(1.03)^2 + (1.98)^3}$.

47. Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f(u, v) = u^2 + 2v$, $u(x, y) = xy^2$, $v(x, y) = x + 3y$.

48. Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f(u, v) = e^{uv}$, $u(x, y) = xy + y^2$, $v(x, y) = 2x + y$.
49. Tìm df của hàm $f(x^2 + 2y, e^{xy})$.
50. Tìm d^2f của hàm hợp $f = f(u, v) = 2u + v^2$; $u(x, y) = xy + 2x$; $v(x, y) = x^2 + y^2$.
51. Tìm $y'(x)$ biết $y(x)$ xác định bởi $xy + x^2 + y^2 = e^{xy}$.
52. Tìm $dz(1,1)$ biết $z = z(x, y)$ xác định bởi $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$, $z(1,1) = -2$.
53. Tìm z''_{xy} biết $z = z(x, y)$ xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = e^{x+y+z}$.
54. Tìm $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ biết $z = z(x, y)$ xác định bởi $xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3$.
55. Tìm đạo hàm của $f(x, y) = xy^2 - 3x^4y^5$ tại điểm $M(1,1)$ theo hướng $\vec{u} = (1, -2)$.
56. Tìm đạo hàm của $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ tại $M(1,2)$ theo hướng của vecto tạo với chiều dương Ox một góc 30° .
57. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$ tại $M(3,3,1)$ theo hướng của vecto $(2,1,2)$
58. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y, z) = x^2 - 3yz + 4$ tại $M(1,2,-1)$ theo hướng của vecto tạo với các trục tọa độ những góc bằng nhau.
59. Cho $f(x, y) = \ln(xyz)$ và điểm $M(1, -2, -3)$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng của hàm số tại M.

Công thức Taylor, Maclaurint:

60. Cho hàm $f(x, y) = x^2 + 2xy$ và một điểm $M(1,2)$. Tìm công thức Taylor của f tại M đến cấp 2.
61. Tìm khai triển Taylor của $f(x, y) = \frac{1}{2x + 3y}$ đến cấp 2 tại $M(1,2)$.
62. Tìm khai triển Taylor cấp 3 của hàm số $f(x, y) = \ln(x + y)$ tại $M(1,1)$.
63. Tìm khai triển Maclaurint của hàm số $f(x, y) = e^x \sin y$ đến cấp 3.

Cực trị.

Tìm cực trị của hàm

64. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
65. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
66. $f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$
67. $f(x, y) = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$
68. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 32 \ln(xy)$
69. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$