

Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội  
Viện Toán ứng dụng và Tin Học

## ĐỀ CƯƠNG BÀI TẬP HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG

### Giới hạn dãy số

Tính giới hạn của dãy sau:

$$1. u_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

$$2. u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

$$3. x_n = \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$4. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1+\sqrt{2n+1}}} \right)$$

$$5. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$6. u_1 = 13; u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$$

$$7. u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - u_n^2$$

$$8. u_1 = 1, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

$$9. u_1 = \sqrt[k]{5}, u_{n+1} = \sqrt[k]{5u_n}; k \in \mathbb{N}$$

$$10. u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$11. x_n = \frac{a^n}{n!}$$

$$12. u_n = \frac{\ln(n^2 + 1 + n)}{\ln(n^{10} + n - 1)}$$

$$13. x_n = 0, \underbrace{11\dots1}_n$$

$$14. x_n = 0, \underbrace{454545\dots45}_{n \text{ 45}}$$

$$15. x_n = \left( \frac{2n-1}{5n+1} \right)^{n^2}$$

$$16. x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$17. x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$18. x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Chứng minh dãy sau hội tụ

$$19. x_n = \left( 1 - \frac{2}{2 \cdot 3} \right) \cdot \left( 1 - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) \dots \left( 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$20. x_n = \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$21. x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$22. x_n = \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$23. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \end{cases} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$24. \text{ Cho dãy } x_n, y_n \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = b \\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \end{cases} . \text{ Tìm } \lim x_n, y_n .$$

$$25. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1}{x_n} \right) \end{cases} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$26. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } u_1 = 1, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$27. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{4}{3} u_n - u_n^2 . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$28. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } u_1 = 13; u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$29. \text{ Cho } \lim x_n = a, \text{ tìm } \lim \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} .$$

$$30. \text{ Cho } \lim x_n = a, x_n > 0, \text{ tìm } \lim \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} .$$

### Khái niệm hàm số

Tìm tập xác định

$$31. y = \arcsin \frac{2x}{x+1}$$

$$33. y = \arcsin \left( \log \left( \frac{x}{10} \right) \right)$$

$$32. y = \log(1 - 2 \cos x)$$

$$34. \text{ Cho } f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{2-x} . \text{ Tìm TXĐ của } f \circ g, g \circ f, g \circ g, f \circ f .$$

35. Cho  $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ . Tìm  $f(x)$

Hàm nào sau đây là hàm chẵn, hàm lẻ:

36.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

38.  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

37.  $f(x) = 3x - x^3$

39.  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

40. Hàm nào sau đây là hàm tuần hoàn, xác định chu kì cơ sở (nếu có)

41.  $f(x) = A \sin kx + B \cos kx$

44.  $f(x) = \sin^2 x$

42.  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$

45.  $f(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \sin x$

43.  $f(x) = \sin x^2$

46. Liệu có hàm tuần hoàn không có chu kì cơ sở hay không?

**Giới hạn của hàm số. Hàm liên tục.**

Tính giới hạn:

47.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan^2 x)^{1/\sin^2(2x)}$

55.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tanh\left(\frac{1}{x}\right)$

48.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

56.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \arctan 3x + 3x^2}{\ln(1+3x + \sin^2 x) + xe^x}$

49.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cosh x)^{1/(1-\cos x)}$

57.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+10x} - \sqrt[3]{1+3x}}{\arcsin(3x+x^2) - \sinh(2x+x^3)}$

50.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$

58.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln \frac{x}{2} \right)$

51.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}$

59.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$

52.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x}\right)^x$

60.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x}$

53.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$

61.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - 3 \arcsin 4x}{\sin 5x - 6 \arctan 7x}$

54.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$

Cho  $x \rightarrow +\infty$ , chứng minh rằng:

62.  $2x^3 - 3x^2 + 1 = o(x^3)$

64.  $\ln x = o(x^\varepsilon), \varepsilon > 0$

63.  $\frac{\arctan x}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

65.  $x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Tìm các điểm gián đoạn của hàm số, xác định loại điểm gián đoạn:

$$66. f(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$$

$$67. f(x) = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

$$68. f(x) = 3^{x/(1-x^2)}$$

$$69. f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$70. f(x) = \frac{|x|}{\arctan x}$$

Tìm a để hàm liên tục:

$$75. f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0, n \in \mathbb{N} \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

$$71. y = \frac{x+1}{\arctan(1/x)}$$

$$72. f(x) = \ln \ln(1+x^2)$$

$$73. f(x) = \frac{3^{1/x} + 2^{1/x}}{3^{1/x} - 2^{1/x}}$$

$$74. y = (\sin x) \sin \frac{1}{x}$$

$$76. y = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Chứng minh phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$77. x \cdot 2^x = 1$$

$$78. x \cdot e^x = 2$$

$$79. x^2 \cdot \arctan x = a; a \neq 0$$

$$80. x = \alpha \sin x + 1, 0 < \alpha < 1$$

81. CMR: hàm số  $f(x) = \frac{1}{x}$  liên tục trên  $(0,1)$  nhưng không liên tục đều trên khoảng đó.

82. CMR: hàm số  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$  liên tục và bị chặn trên  $(0,1)$  nhưng không liên tục đều trên khoảng đó.

83. CMR: hàm số  $f(x) = \sin x^2$  liên tục và bị chặn trên  $(-\infty, +\infty)$  nhưng không liên tục đều trên khoảng đó.

84. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước:  $f(x) = \frac{x}{4-x^2}, -1 \leq x \leq 1$

85. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước:  $f(x) = \ln x, 0 < x < 1$

86. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước:  $f(x) = \frac{\sin x}{x}, 0 < x < \pi$

87. Chứng minh phương trình sau có vô số nghiệm:  $x \sin x = 1/2$

88. Chứng minh phương trình sau có đúng hai nghiệm:  $10^{x-1} = x$

89. Chứng minh phương trình sau có đúng hai nghiệm:  $2^x = 4x$

**Đạo hàm. Vi phân.**

$$90. \text{Tính } f'(0) \text{ biết } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

91. Tính  $f'(0^+)$ ;  $f'(0^-)$  biết  $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

92. Tính  $f'(0)$  biết  $f(x) = x^2 + 3|x| + 2$

93. Tính  $f'(x)$  biết

$$f(x) = (x + 2 \sin x)^{\cot x + \sin^2 x}$$

94. Tính  $f'(x)$  biết  $f(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{x^3} \sin^7 x}$

95. Tính  $f^{(n)}(x)$  biết:  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

96. Tính  $f^{(100)}(x)$  biết:  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$

97. Tính  $f^{(n)}(x)$  biết:  $f(x) = \sin^2 x$

98. Tính  $f^{(100)}(x)$  biết:

$$f(x) = (x^2 + 1) \ln(x + 1)$$

99.  $f^{(100)}(0)$ ;  $f^{(101)}(0)$  biết  $f(x) = \arctan x$

100. Tính  $f^{(n)}(x)$  biết:

$$f(x) = x \ln \frac{3+x}{3-x}$$

101. Tìm:  $\frac{d}{d(x^2)} \left( \frac{\sin x}{x} \right)$

103. Tìm:  $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$

102. Tìm:  $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

104. Tìm:  $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)}$

105. CMR: hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$  có 3 điểm uốn thẳng hàng.

106. CMR:  $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left( \frac{x+y}{2} \right)^n$ ,  $x \neq y > 0$ ,  $n > 1$

107. CMR:  $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{(x+y)/2}$ ,  $x \neq y$

108. Tìm trên đường cong  $y = x^3$  điểm có tiếp tuyến song song với dây cung nối 2 điểm  $A(-1, -1), B(2, 8)$ .

109. Kiểm tra tính đúng đắn của định lý Rolle đối với hàm số:  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

110. Giải thích tại sao định lý Cô-si không đúng với 2 hàm số:  $f = x^2$ ,  $g = x^3$  trên  $[-1, 1]$ .

111. CMR: tất cả các nghiệm thực của đa thức  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$  đều thuộc  $(-1, 1)$ .

112. Cho đa thức Tre-bu-sep:  $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ . CMR: tất cả các không điểm của đa thức trên đều dương.

113. CMR: tất cả các nghiệm của đa thức  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$  đều là số thực.

114. CMR:  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

115. CMR:  $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

116. CMR:  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ ,  $0 < b < a$

117. CMR:  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ ,  $x > 0$

118. CMR:  $(x^a + y^a)^{1/a} > (x^b + y^b)^{1/b}$ ,  $x, y > 0$ ,  $b > a > 0$

119. CMR:  $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

120. CMR:  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ ,  $x > 0$

121. Xác định giá trị trung gian  $c$  khi áp dụng định lý Lagrange vào hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & : x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & : x > 1 \end{cases} \text{ trên đoạn } [0, 2].$$

Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurint đến cấp  $n$ :

122.  $f(x) = \frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}}$ ,  $n = 3$

129.  $f(x) = x \cosh 3x$ ,  $n = 5$

123.  $f(x) = \ln \frac{2-3x}{3+2x}$ ,  $n = 3$

130.  $f(x) = x \cdot \cosh^2 x$ ,  $n = 5$

124.  $f(x) = \frac{x-4}{x^2-5x+6}$ ,  $n = 3$

131.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2-x^2}}$ ,  $n = 8$

125.  $f(x) = \frac{x^2+5x-5}{x^2+x-2}$ ,  $n = 3$

132.  $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ ,  $n = 9$

126.  $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$ ,  $n = 4$

133.  $f(x) = e^{x \cos x}$ ,  $n = 4$

127.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ,  $n = 5$

134.  $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2-x^3}$ ,  $n = 5$

128.  $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}$ ,  $n = 4$

135.  $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$ ,  $n = 6$

Tìm khai triển Taylor tại  $x_0$  đến cấp  $n$

136.  $f(x) = (x^2-1)e^{2x}$ ,  $x_0 = -1$ ,  $n = 3$

138.  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \ln x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $n = 4$

137.  $f(x) = \ln(2x+1)$ ,  $x_0 = 1/2$ ,  $n = 3$

$$139. \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1}, x_0 = 1, n = 3$$

$$140. \quad f(x) = e^{x^2+2x-1}, x_0 = -1, n = 4$$

$$141. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, x_0 = 1, n = 4$$

Ứng dụng đạo hàm, tính giới hạn:

$$143. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\tan^2 x}$$

$$144. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}$$

$$145. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x^2}{x \cos x - \sin x}$$

$$146. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arctan(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$147. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\arcsin x - \ln(1+x)}$$

$$148. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x}$$

$$149. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x)^{\tan x}$$

$$150. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln(\sinh x)}$$

$$151. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x - 1) \ln x$$

$$152. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$$

$$153. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$$

$$154. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^3}$$

$$155. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right)$$

$$156. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x \arctan x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$157. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

$$158. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$$

$$159. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\tanh x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

$$160. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$$

$$142. \quad f(x) = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x+5}}, x_0 = 2, n = 5$$

$$161. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{1/x}$$

$$162. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$163. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

$$164. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arcsin x}{\tan x - \sin x}$$

$$165. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$$

$$166. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$$

$$167. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} + \ln(1-x) - 1}{2 - \sqrt{4+x^3}}$$

$$168. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{\arcsin x - \sin x}$$

$$169. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\tan x} - \sin^2 x - x}{x + x^3 - \tan x}$$

$$170. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - \ln(1+x^2) - \arcsin x^3}{x \sin x - x^2}$$

$$171. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^3} - \cos x^4}{\tan x - x}$$

$$172. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/(1-x)} - \sinh x - \cos x}{\sqrt[6]{1+x} + \sqrt[6]{1-x} - 2}$$

$$173. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh 2x - (1+3x)^{-1/3} - x}{x^2/2 + \ln(1+\tan x) - \arcsin x}$$

$$174. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - \arcsin x}{\sinh(x-x^2) - \ln \sqrt{1+2x}}$$

$$175. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arctan x - \tan x}{e^{\sinh x} - (1+2x)^{1/2} - x^2}$$

$$176. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - xe^x}{x\sqrt{1-x^2} - \tan x}$$

$$177. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sin x - x \cos x}$$

$$178. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{x + \tan x - \sin 2x}$$

$$179. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x\sqrt{1+x} - 1}{\sin x \cosh x - \sinh x}$$

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số cho bởi tham số sau:

$$183. \quad x = t^3 + 2t^2 + t, y = -2 + 3t - t^3$$

$$184. \quad x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - 6 \arctan t$$

$$185. \quad x = \frac{t^3}{1+t^2}, y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$$

$$186. \quad x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$$

$$187. \quad x = \cos t + \ln \tan(t/2), y = \sin t$$

$$188. \quad x = \frac{t^2 + 1}{t}, y = \frac{t^3 + 1}{t^2}$$

$$180. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8-x^4} - 2}$$

$$181. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{1+x^3} - \sin 1}{\sqrt[5]{1-2x \ln \cos x} - 1}$$

$$182. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt[3]{1-4x^2}}}{(1/x) \arcsin 2x - 2 \cosh x^2}$$

$$189. \quad x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t^2 - 1}{t}$$

$$190. \quad x = \frac{t^2}{t^2 - 1}, y = \frac{t^2 + 1}{t + 2}$$

$$191. \quad x = \frac{1}{t - t^2}, y = \frac{1}{t - t^3}$$

$$192. \quad x = e^t - t, y = e^{2t} - 2t$$

$$193. \quad x = \frac{e^t}{t}, y = (t-1)^2 e^t$$

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số cho trong tọa độ cực sau:

$$194. \quad r = 2 + \cos \varphi$$

$$195. \quad r = 1 - 2 \cos \varphi$$

$$196. \quad r = \cos 3\varphi$$

$$197. \quad r = 1 + \tan \varphi$$

$$198. \quad r = \frac{2}{\cos \varphi} - 1$$

$$199. \quad r = \tan 2\varphi$$

$$200. \quad r = 1 + \tan \varphi$$

$$201. \quad r = 2(1 - \cos \varphi)$$

### Tích phân.

Tính nguyên hàm bằng công thức cơ bản:

$$202. \quad \int \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{x\sqrt{x}} dx$$

$$203. \quad \int \frac{4x^2 - 9x + 10}{2x - 1} dx$$

$$204. \quad \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 11x + 4}{(x+1)^{30}} dx$$

$$205. \quad \int \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 9}{(x-2)^{15}} dx$$

$$206. \quad \int \frac{dx}{(2x^2 + 5)(x^2 - 3)}$$

$$207. \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Tính nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến

$$208. \quad \int x^4 \sqrt[9]{(2x^5 + 3)^4} dx$$

$$209. \quad \int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt[7]{(2x+1)^4}} dx$$

$$210. \quad \int \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$211. \quad \int \frac{x^3}{x - \sqrt{x^2 - 1}} dx$$



$$212. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$213. \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$214. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Tính nguyên hàm bằng phương pháp tích phân từng phần:

$$217. \int 3^x \cos x dx$$

$$218. \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$219. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

$$220. \int (\arcsin x)^2 dx$$

$$221. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$$

Tính tích phân:

$$225. \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$$

$$226. \int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$227. \int \sqrt{x^2+2x+5} dx$$

$$228. \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$229. \int \frac{3x+5}{(x^2+4x+5)^2} dx$$

$$230. \int \frac{dx}{x(x^7+1)}$$

$$231. \int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} dx$$

$$232. \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx$$

$$233. \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}$$

$$215. \int \sqrt{a^2+x^2} dx$$

$$216. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$222. \int \cos^2(\ln x) dx$$

$$223. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$224. \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$234. \int x\sqrt{x^2+x+1} dx$$

$$235. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^2 x}}$$

$$236. \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$$

$$237. \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

$$238. \int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x+\cos x} dx$$

$$239. \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$240. \int x \arccos(5x+1) dx$$

$$241. \int \frac{dx}{\cos^n x}$$

$$242. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Tính giới hạn của các dãy sau:

$$243. \quad \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

$$244. \quad \frac{1}{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$$

$$245. \quad \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2}$$

$$246. \quad \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

$$247. \quad \sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{n+1/k}$$

$$248. \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

Tính các đạo hàm sau:

$$249. \quad \frac{d}{dx} \left( \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right)$$

$$250. \quad \frac{d}{dx} \left( \int_{\sqrt{x}}^1 e^{t^2} dt \right)$$

$$251. \quad \frac{d}{dx} \left( \int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3 dt \right)$$

$$252. \quad \frac{d}{dx} \left( \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \right)$$

Tính giới hạn:

$$253. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$$

$$254. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\tan x}$$

$$255. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$$

Tính các tích phân sau:

$$256. \quad \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$257. \quad \int_1^e \frac{\cos(\ln x) dx}{x}$$

$$258. \quad \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

$$259. \quad \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx$$

$$260. \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} dx$$

$$261. \quad \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} dx$$

$$262. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx$$

$$263. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

$$264. \int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$$

$$265. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$266. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$$

$$267. \int_0^{1/3} \cosh^2 3x dx$$

$$268. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$$

$$274. \text{Xác định dấu của tích phân sau: } \int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

$$275. \text{Xác định dấu của tích phân sau: } \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$276. \text{Xác định dấu của tích phân sau: } \int_{1/2}^1 x^2 \ln x dx$$

$$277. \text{So sánh } \int_0^1 e^{-x} dx, \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$278. \text{CMR: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$$

$$279. \text{CMR: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0$$

$$269. \int_0^{\pi/2} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

$$270. \int_0^1 \frac{\ln(1+x) dx}{(1+x^2)}$$

$$271. \int_{1/2}^2 (1+x-1/x) e^{x+1/x} dx$$

$$272. \int_0^1 \arcsin \sqrt{x} dx$$

$$273. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

### Ứng dụng tích phân xác định:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$280. \begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y^3 = x^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 282. \quad x^4 + y^4 = x^2 + y^2 \\ 283. \quad r = 2 + \cos \varphi \end{array}$$

$$281. \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 = 12(y - 1) \end{cases}$$

Tính độ dài cung:

$$284. \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi \quad \begin{array}{l} 286. \quad r = a(1 + \cos \varphi) \\ 287. \quad \begin{cases} y = \arcsin(e^{-x}) \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

$$285. \quad r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$$

Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được

$$288. \quad \text{Khi quay } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ quanh Ox hoặc Oy.}$$

$$289. \quad \text{Khi quay } \begin{cases} y = e^x \\ x = 0, y = 0 \end{cases} \text{ quanh Ox hoặc Oy.}$$

$$290. \quad \text{Khi quay } \begin{cases} y = \sin^2 x \\ x = 0, x = \pi \end{cases} \text{ quanh Ox.}$$

$$291. \quad \text{Khi quay } r = a \cos^2 \varphi \text{ quanh trục gốc.}$$

Tính diện tích xung quanh của vật thể tròn xoay thu được:

$$292. \quad \text{Khi quay } \begin{cases} y = \tan x \\ x = 0, x = \pi / 4 \end{cases} \text{ quanh Ox.}$$

$$293. \quad \text{Khi quay } x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \text{ quanh Ox.}$$

$$294. \quad \text{Khi quay } x^2 + (y - 2)^2 = 1 \text{ quanh Ox.}$$

**Tích phân suy rộng:**

Tính tích phân suy rộng:

$$\begin{array}{ll} 295. \quad \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} & 299. \quad \int_2^{+\infty} \frac{(x^2 + 1)}{x(x - 1)^3} dx \\ 296. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^5 + x^{10}}} & 300. \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x - 1)^2 (x + 1)^3} \\ 297. \quad \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx & 301. \quad \int_1^{+\infty} \frac{x + 3}{x(x^2 + x + 1)} dx \\ 298. \quad \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x + 1)(x - 2)} dx & 302. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

$$303. \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2(x)} dx$$

$$304. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^6 + 3)}$$

$$305. \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + \sqrt{e^x}} dx$$

$$306. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx$$

$$307. \int_0^{+\infty} \frac{2^x}{4^x + 1} dx$$

$$308. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

$$309. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x}$$

$$310. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{2^x}$$

$$311. \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3 - 1}$$

$$312. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$313. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}$$

$$314. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Xét sự hội tụ:

$$326. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x + \ln x}}$$

$$327. \int_1^{+\infty} \frac{3xdx}{2x^3 + \sin 3x}$$

$$315. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$316. \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 12}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$317. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

$$318. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x - 2}}$$

$$319. \int_0^1 \frac{dx}{(2 - x)\sqrt{1 - x}}$$

$$320. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$321. \int_0^1 \frac{(2 - \sqrt[3]{x} - x^3) dx}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$322. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4 - x)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$323. \int_{-2}^2 \frac{x^4 dx}{(1 + x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$324. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$$

$$325. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$328. \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{2x^2 + 2 \ln x}$$

$$329. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x + 1)\sqrt{x + 1}}$$

$$330. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$331. \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$332. \int_1^{+\infty} \left( e^{1/x^2} - \cos \frac{1}{x} \right) dx$$

$$333. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$334. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} dx$$

$$335. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x} dx$$

$$336. \int_1^{+\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x^3}{e^{3/x} - 1} dx$$

Tim  $\alpha$  để tích phân hội tụ:

$$343. \int_1^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{e^{3/x} - 1}{\alpha} \right) dx$$

$$344. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan 3x}{(2+x)^\alpha} dx$$

$$345. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x^\alpha} dx$$

$$346. \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x + x^\alpha} dx$$

$$347. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x + 2x^\alpha} dx$$

$$353. \text{Tim } \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$337. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + \ln 2x}$$

$$338. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$$

$$339. \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[5]{x^3}) dx}{e^x - 1}$$

$$340. \int_0^3 \frac{2x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$341. \int_0^1 \frac{5x^3 + \sqrt{x}}{\tan x - x} dx$$

$$342. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^2}$$

$$348. \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{e^{x^\alpha} - 1} dx$$

$$349. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + \ln(1+x^2))x^{5\alpha}}$$

$$350. \int_1^{+\infty} \frac{(x^3-1)^\alpha}{\sqrt{x^7-x^5+1}} dx$$

$$351. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^3 + \sin x)x^\alpha}$$

$$352. \int_0^1 \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1+x}}{\cosh x - \cos x} dx$$

354. Tìm  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}$
355. Nếu tích phân  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  hội tụ, liệu có thể suy ra  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ?
356. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
357. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ:  $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$
358. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ:  $\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx$

**Không gian Metric.**

359. Cho không gian metric  $(X, d)$ . Ta định nghĩa:  $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$
- CMR:  $d_1$  là một metric
  - CMR:  $x_n \rightarrow x$  theo  $d_1$  khi và chỉ khi  $x_n \rightarrow x$  theo  $d$
  - CMR:  $(X, d)$  đầy đủ khi và chỉ khi  $(X, d_1)$  đầy đủ
2. Cho 2 không gian metric  $(X_1, d_1)$  và  $(X_2, d_2)$ . Trên  $X = X_1 \times X_2$  ta định nghĩa:
- $$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$
- CMR  $(X, d)$  là không gian metric
  - Cho  $(X_1, d_1)$  và  $(X_2, d_2)$  đầy đủ, cmr  $(X, d)$  là không gian metric đầy đủ.
3. Cho  $X = C_{[0,1]}$ , xét 2 metric  $d(x, y) = \sup_{[0,1]} |x(t) - y(t)|$ ;  $d_1(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$ .
- CMR:  $x_n \xrightarrow{d} x$  suy ra  $x_n \xrightarrow{d_1} x$
  - Điều ngược lại có đúng không?
  - CMR  $(X, d_1)$  không đầy đủ.
4. CMR trong không gian metric ta có:  $\overline{A \subset B} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}}$
5. CMR trong không gian metric ta có:  $\overline{A \cup B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
6. Cho  $X = C_{[0,1]}$ , xét metric  $d(x, y) = \sup_{[0,1]} |x(t) - y(t)|$ . Giả sử:  $x_0 \in C_{[a,b]}$ . Xét các tập sau:
- $$M_1 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) > x_0(t), t \in [a, b]\}.$$
- $$M_2 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) \geq x_0(t), t \in [a, b]\}$$

$$M_3 = \{x \in C_{[a,b]} : \exists t \in [a,b]: x(t) \geq x_0(t)\}$$

CMR:  $M_1$  mở,  $M_2, M_3$  đóng  $M_2, M_3$ .

7. Trong  $C^1_{[a,b]}$  định nghĩa:  $p_1(x) = |x(a)| + \sup_{[a,b]} |x'(t)|$ ,  $p_2(x) = \sup_{[a,b]} |x(t)|$ ,  
 $p_3(x) = \sup_{[a,b]} \{ |x(t)| + |x'(t)| \}$ .
- a. CMR:  $p_1, p_2, p_3$  là các chuẩn trên  $C^1_{[a,b]}$
- b. CMR:  $p_2, p_3$  không tương đương nhau
- c. CMR:  $p_1, p_3$  không tương đương nhau

### Hàm nhiều biến

Tìm miền xác định:

8.  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

9.  $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$

10.  $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

11.  $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$

12. Tìm giới hạn hoặc chứng minh giới hạn không tồn tại:

13.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x + y \sin \frac{1}{x} \right)$

14.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$

15.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$

16.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

17.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

18.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$

19.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1 + xy}}$

20.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y} + 9 - 3}$

29.

21.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

22.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 6} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt[6]{x^4 + y^4 + 2(1 + x^2y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2}}$

23.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$

24.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(x^2 + y^2)$

25.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x - 2xy - 4y}$

26.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(x^2 + y^2)$

27.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + xy)^{1/x^2+y^2}$

28.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \cos \sqrt{x^2 + y^2} \right)^{-1/(x^2+y^2)}$



**Hàm liên tục:**

Khảo sát tính liên tục của hàm sau:

$$30. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$33. u = \begin{cases} \frac{\sin(xyz)}{z}, & z \neq 0 \\ x^2, & z = 0 \end{cases}$$

$$31. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$34. z = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ m, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$32. z = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, & x + y \neq 0 \\ 3, & x + y = 0 \end{cases}$$

**Đạo hàm - vi phân:**

35. Cho hàm  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ , tính  $f'_x(1, 1)$ ,  $f'_x(0, 0)$ ,  $f'_y(0, 0)$ .

36. Cho  $f(x, y) = \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2} dt$ , tính  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$ .

37. Cho  $f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & \text{neu } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{neu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ . Tính  $f'_x(0, 0)$ .

38. CMR hàm  $f(x, y) = e^x \sin y$  thỏa mãn  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .

39. CMR hàm  $u(x, t) = \sin(x - at)$  thỏa mãn  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

40. CMR hàm  $u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$  thỏa mãn  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

41. Cho  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{neu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{neu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ . Tìm  $f''_{xx}(0, 0)$ .

42. Cho  $u(x, y) = (2x + 3y) \ln(x + 2y)$ . Tìm  $\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(1, 2)$ .

43. Cho  $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ . Tìm  $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ . Tìm  $df(x, y)$ .

44. Cho  $f(x, y) = e^{xy}$ . Tìm  $d^2 f(1, 1)$ .

45. Cho  $f(x, y) = \frac{y}{x}$ . Tìm  $d^2 f(1, 1)$ .

46. Dùng vi phân cấp 1, tính gần đúng  $A = \sqrt{(1.03)^2 + (1.98)^3}$ .

47. Tìm  $f''_{xy}$  của hàm hợp  $f(u, v) = u^2 + 2v$ ,  $u(x, y) = xy^2$ ,  $v(x, y) = x + 3y$ .

48. Tìm  $f''_{xy}$  của hàm hợp  $f(u, v) = e^{uv}$ ,  $u(x, y) = xy + y^2$ ,  $v(x, y) = 2x + y$ .
49. Tìm  $df$  của hàm  $f(x^2 + 2y, e^{xy})$ .
50. Tìm  $d^2f$  của hàm hợp  $f = f(u, v) = 2u + v^2$ ;  $u(x, y) = xy + 2x$ ;  $v(x, y) = x^2 + y^2$ .
51. Tìm  $y'(x)$  biết  $y(x)$  xác định bởi  $xy + x^2 + y^2 = e^{xy}$ .
52. Tìm  $dz(1,1)$  biết  $z = z(x, y)$  xác định bởi  $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$ ,  $z(1,1) = -2$ .
53. Tìm  $z''_{xy}$  biết  $z = z(x, y)$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 = e^{x+y+z}$ .
54. Tìm  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  biết  $z = z(x, y)$  xác định bởi  $xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3$ .
55. Tìm đạo hàm của  $f(x, y) = xy^2 - 3x^4y^5$  tại điểm  $M(1,1)$  theo hướng  $\vec{u} = (1, -2)$ .
56. Tìm đạo hàm của  $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$  tại  $M(1,2)$  theo hướng của vecto tạo với chiều dương Ox một góc  $30^\circ$ .
57. Tìm đạo hàm của hàm  $f(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$  tại  $M(3,3,1)$  theo hướng của vecto  $(2,1,2)$
58. Tìm đạo hàm của hàm  $f(x, y, z) = x^2 - 3yz + 4$  tại  $M(1,2,-1)$  theo hướng của vecto tạo với các trục tọa độ những góc bằng nhau.
59. Cho  $f(x, y) = \ln(xyz)$  và điểm  $M(1, -2, -3)$ . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng của hàm số tại M.

**Công thức Taylor, Maclaurint:**

60. Cho hàm  $f(x, y) = x^2 + 2xy$  và một điểm  $M(1,2)$ . Tìm công thức Taylor của f tại M đến cấp 2.
61. Tìm khai triển Taylor của  $f(x, y) = \frac{1}{2x + 3y}$  đến cấp 2 tại  $M(1,2)$ .
62. Tìm khai triển Taylor cấp 3 của hàm số  $f(x, y) = \ln(x + y)$  tại  $M(1,1)$ .
63. Tìm khai triển Maclaurint của hàm số  $f(x, y) = e^x \sin y$  đến cấp 3.

**Cực trị.**

Tìm cực trị của hàm

64.  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
65.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
66.  $f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$
67.  $f(x, y) = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$
68.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 32 \ln(xy)$
69.  $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$