TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC

BÙI XUÂN DIỆU

Bài Giảng

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

(lưu hành nội bộ)

TẬP HỢP - LOGIC - ÁNH XẠ - SỐ PHỨC, MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH, KHÔNG GIAN VÉCTƠ, ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG - KHÔNG GIAN EUCLIDE

Tóm tắt lý thuyết, Các ví dụ, Bài tập và lời giải

Hà Nội- 2009

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

TẬP HỢP - LOGIC - ÁNH XẠ - SỐ PHỨC

§1. LOGIC

1.1 Các phép toán logic

1. Phép phủ định

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

$$\overline{A} = 1 - A$$

2. Phép hội

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$$(A \wedge B) = \min\{A, B\}$$

3. Phép tuyển

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$(A \vee B) = \max\{A, B\}$$

4. Phép kéo theo

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$(A \to B) = \max\{1 - A, B\}$$

5. Phép tương đương

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Chú ý: Để đơn giản về mặt kí hiệu, khi viết A chúng ta có thể hiểu là mệnh đề A hoặc giá trị chân lý của mệnh đề A tuỳ theo hoàn cảnh phù hợp. Ví dụ như viết $\overline{A} = 1 - A$ thì ta hiểu là giá trị chân lý của mệnh đề $\overline{A}$ bằng 1 trừ đi giá trị chân lý của A.

1.2 Các tính chất

1. Tính giao hoán:
   $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

2. Tính kết hợp
   $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C), (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

3. Tính phân phối
   $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

4. Tính chất của phép kéo theo
   $A \to B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$

5. Tính chất của phép tương đương
   $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

Chú ý: Để chứng minh các mệnh đề logic, ta sử dụng khái niệm tương đương logic, thay cho “khái niệm bằng nhau” của các mệnh đề. Bài tập chủ yếu trong bài này là chứng minh hai mệnh đề tương đương logic hoặc chứng minh một mệnh đề logic luôn đúng. Có ba phương pháp chủ yếu để làm bài:

1. Lập bảng các giá trị chân lý

2. Biến đổi tương đương các mệnh đề

3. Chứng minh bằng phản chứng

1.3 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Ta thường cần phải phát biểu những mệnh đề có dạng "Mọi phần tử x của tập hợp X đều có tính chất $\mathcal{P}(x)$". Người ta quy ước kí hiệu mệnh đề này như sau:

$$\forall x \in X, \mathcal{P}(x)$$

Kí hiệu $\forall$ được gọi là *lượng từ phổ biến*, nó là cách viết ngược lại của chữ cái đầu tiên của từ "All" trong tiếng Anh.
Tương tự ta cũng hay gặp mệnh đề có dạng " Tồn tại một phần tử x của X có tính chất $\mathcal{P}(x)$". Mệnh đề này được quy ước kí hiệu như sau:

$$\exists x \in X, \mathcal{P}(x)$$

Kí hiệu $\exists$ được gọi là *lượng từ tồn tại*, nó là cách viết ngược lại của chữ cái đầu tiên của từ "Exists"trong tiếng Anh.
Mệnh đề " Tồn tại duy nhất một phần tử x của X có tính chất $\mathcal{P}(x)$" được viết như sau:

$$\exists! x \in X, \mathcal{P}(x)$$

Lượng từ phổ biến và tồn tại có mối quan hệ quan trọng sau đây:

$$\overline{\forall x \in X, \mathcal{P}(x)} \equiv \exists x \in X, \overline{\mathcal{P}(x)}$$

$$\overline{\exists x \in X, \mathcal{P}(x)} \equiv \forall x \in X, \overline{\mathcal{P}(x)}$$

Bài tập 1.1. Chứng minh các mệnh đề sau đây là đúng :

a) $\left[\overline{A} \wedge (A \vee C)\right] \to C$.

b) $[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$.

c) $[A \wedge (A \to B)] \to B$.

d) $[(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)] \to C$.

Lời giải. a) **Cách 1: Lập bảng giá trị chân lý**

A	C	$\overline{A}$	$A \vee C$	$\overline{A} \wedge (A \vee C)$	$[\overline{A} \wedge (A \vee C)] \to C$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

Cách 2: Biến đổi tương đương các mệnh đề

$$
\begin{aligned}
&[\overline{A} \wedge (A \vee C)] \to C\\
\Leftrightarrow&[(\overline{A} \wedge A) \vee (\overline{A} \wedge C)] \to C\\
\Leftrightarrow&[0 \vee (\overline{A} \wedge C)] \to C\\
\Leftrightarrow&[(\overline{A} \wedge C)] \to C\\
\Leftrightarrow&\overline{\overline{A} \wedge C} \vee C\\
\Leftrightarrow&A \vee \overline{C} \vee C\\
\Leftrightarrow&1
\end{aligned}
$$

Cách 3: Chứng minh bằng phản chứng.
Giả sử mệnh đề đã cho là sai. Vì mệnh đề kéo theo chỉ sai khi giả thiết đúng và kết luận sai nên: $\overline{A} \wedge (A \vee C) = 1$ và $C = 0$. Nhưng vì $C = 0$ nên $\overline{A} \wedge (A \vee C) = \overline{A} \wedge (A \vee 0) = \overline{A} \wedge A = 0$, mâu thuẫn, chứng tỏ mệnh đề đã cho luôn đúng.
Các câu $b), c), d)$ chứng minh tương tự. ∎

Bài tập 1.2. Chứng minh rằng:

a) $A \leftrightarrow B$ và $(A \wedge B) \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right)$ là tương đương logic.

b) $(A \to B) \to C$ và $A \to (B \to C)$ không tương đương logic.

c) $\overline{A \leftrightarrow B}$ và $\overline{A} \leftrightarrow B$ là tương đương logic.

Lời giải. Cũng giống như bài toán chứng minh một mệnh đề nào đó luôn đúng, bài toán chứng minh hai mệnh đề nào đó tương đương logic cũng có 3 phương pháp chứng minh như trên. Riêng với bài toán chứng minh hai mệnh đề không tương đương logic thì ta chỉ cần chỉ ra một bộ giá trị chân lý nào đó của các mệnh đề con mà ở đó hai mệnh đề đã cho có hai giá chị chân lý khác nhau. ■

Bài tập 1.3. Cho A là tập hợp con của tập số thực, cận dưới đúng x_0 của A kí hiệu $\text{Inf}(A) = x_0$ có thể xác định bởi mệnh đề sau: " Với mọi x trong A có $x_0 \leq x$ và với x_1 có tính chất là $x_1 \leq x$ với mọi x trong A thì suy ra $x_1 \leq x_0$ ". Hãy dùng các kí hiệu để diễn tả mệnh đề trên và mệnh đề phủ định của nó. Từ đó đưa ra cách chứng minh một số không phải là $\text{Inf}(A)$.

Lời giải.

$$x_0 = \text{Inf}(A) \Leftrightarrow [\forall x \in A, (x_0 \leq x)] \wedge [\forall x_1, (x_1 \leq x, \forall x \in A) \rightarrow (x_1 \leq x_0)]$$

$$\begin{aligned}
\overline{x_0 = \text{Inf}(A)} &\Leftrightarrow \overline{[\forall x \in A, (x_0 \leq x)] \wedge [\forall x_1, (x_1 \leq x, \forall x \in A) \rightarrow (x_1 \leq x_0)]} \\
&\Leftrightarrow \overline{[\forall x \in A : (x_0 \leq x)]} \vee \overline{[\exists x_1, (x_1 \leq x, \forall x \in A) \rightarrow (x_1 \leq x_0)]} \\
&\Leftrightarrow [\exists x \in A, x_0 > x] \vee [\exists x_1, \overline{\overline{(x_1 \leq x, \forall x \in A)} \vee (x_1 \leq x_0)}] \\
&\Leftrightarrow [\exists x \in A, x_0 > x] \vee [\exists x_1, (x_1 \leq x, \forall x \in A) \wedge (x_1 > x_0)]
\end{aligned}$$

■

Bài tập 1.4. [Đề thi ĐS K49] Xét xem các mệnh đề sau có tương đương logic không

a) $(A \vee B) \rightarrow C$ và $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

b) $A \rightarrow (B \wedge C)$ và $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$

Bài tập 1.5. [Đề thi ĐS K49] Xét xem các mệnh đề sau đây là đúng hay sai

a) "Nếu các số thực x và y thoả mãn $x > y$ và $y > x$ thì suy ra $x = y$.

b) "Nếu số tự nhiên n lẻ và n^2 chẵn thì suy ra n là số nguyên tố.

Bài tập 1.6. [Đề thi ĐS K51] Cho $(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C)$ và $(A \rightarrow B) \subset (A \vee C)$ là các mệnh đề đúng. Chứng minh $B \rightarrow C$ là mệnh đề đúng.

§2. TẬP HỢP

2.1 Các phép toán trên tập hợp

1. Phép hợp
$$\begin{cases} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \\ x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \end{cases}$$

2. Phép giao
$$\begin{cases} x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \\ x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \notin B \end{cases}$$

3. Phép trừ
$$\begin{cases} x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B \\ x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \in B \end{cases}$$

4. Phép lấy phần bù
   Nếu $A \subset X$ thì $\overline{A} = X \setminus A$ được gọi là phần bù của A trong X.

2.2 Các tính chất

1. Tính giao hoán:
   $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

2. Tính kết hợp
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Tính phân phối
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Tính chất của phép trừ
   Nếu $A, B \subset X$ thì $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

5. Công thức De Moorgan
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{\cap A_i} = \cup \overline{A_i}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{\cup A_i} = \cap \overline{A_i}$$

Bài tập chủ yếu trong bài này là chứng minh hai tập hợp bằng nhau hoặc chứng minh một tập hợp A là tập con của tập B. Có 3 phương pháp chứng minh chủ yếu:

1. Phương pháp phần tử
2. Phương pháp biến đổi tập hợp
3. Phương pháp chứng minh bằng phản chứng

Bài tập 1.7. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Kí hiệu

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|f(x) = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \,|g(x) = 0\}.$$

Xác định tập nghiệm phương trình:

a) $f(x)g(x) = 0$ b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$

Lời giải. Đáp số:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ ■

Bài tập 1.8. Cho 3 tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 4x + 3 \leq 0\right\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\quad |x - 1| \leq 1\}$, $C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 5x + 6 < 0\right\}$. Xác định tập hợp sau: $(A \cup B) \cap C$ và $(A \cap B) \cup C$.

Lời giải. $(A \cup B) \cap C = [0, 3], (A \cap B) \cup C = [1, 3]$ ■

Bài tập 1.9. Cho A, B, C là các tập hợp bất kì, chứng minh:

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Lời giải. a) **Cách 1: Phương pháp phần tử**

$\boxed{\Rightarrow}$ Giả sử $x \in A \cap (B \setminus C)$, ta có $x \in A$ và $x \in B \setminus C$. Suy ra $x \in A, x \in B, x \notin C$. Vì $x \in A$ và $x \in B$ nên ta có $x \in A \cap C$. Mặt khác $x \notin C \supset A \cap C$ nên $x \notin A \cap C$. Vậy $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Giả sử $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$, ta có $x \in A, x \in B$ và $x \notin A \cap C$. Do $x \notin A \cap C$ nên hoặc $x \notin A$ hoặc $x \notin C$. Nhưng vì $x \in A$ nên ta có $x \notin C$. Vì vậy ta có $x \in A \cap (B \setminus C)$.

Cách 2: Phương pháp biến đổi tập hợp

Coi $A, B, C \subset X$ nào đó. Khi đó

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [A \cap B \cap \overline{C}] = A \cap (B \setminus C)$$

b)

$$A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap X = A \cup B$$

Bài tập 1.10. [Đề thi ĐS K51] Cho các tập hợp A, B, C thoả mãn $(A \cup B) \subset (A \cup C)$ và $(A \cap B) \subset (A \cap C)$. Chứng minh $B \subset C$.

Bài tập 1.11. [Đề thi tín chỉ hè 2009] Cho A, B, C là các tập hợp bất kì. Chứng minh rằng

a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

§3. ÁNH XẠ

3.1 Định nghĩa

3.2 Tập ảnh, tập nghịch ảnh

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Giả sử $A \subseteq X, B \subseteq Y$.

1. Tập ảnh
   Kí hiệu $f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) | x \in A\}$.

2. Tập nghịch ảnh
   Kí hiệu $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$. Vì vậy ta có

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B}$$

3.3 Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ

1. Đơn ánh
   Ánh xạ f được gọi là đơn ánh nếu
   i) Với mọi $x_1 \neq x_2 \in X$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$ hoặc
   ii) Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$.

2. Toàn ánh
   Ánh xạ f được gọi là toàn ánh nếu $f(X) = Y$, hay với mỗi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Nói cách khác, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm* với mọi $y \in Y$.

3. Song ánh.
   Ánh xạ f được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh. Nói cách khác, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm duy nhất* với mọi $y \in Y$.

Bài tập 1.12. Cho hai ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $g(\mathbb{R})$. b) Xác định ánh xạ $h = g \circ f$.

Lời giải. a) f là đơn ánh, không phải là toàn ánh, g không phải đơn ánh, cũng không phải là toàn ánh.

b) $g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ ∎

Bài tập 1.13. Chứng minh các tính chất sau của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ $f : X \to Y$

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $A, B \subset X$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, $A, B \subset X$. Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $A, B \subset Y$

d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $A, B \subset Y$

e) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$, $A, B \subset Y$

f) Chứng minh f là đơn ánh khi và chỉ khi $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $\forall A, B \subset X$

Lời giải. a) $\boxed{\Rightarrow}$ Giả sử $y \in f(A \cup B)$,khi đó tồn tại $x \in A \cup B$ sao cho $f(x) = y$. Vì $x \in A \cup B$ nên $x \in A$ hoặc $x \in B$.
Nếu $x \in A$ thì $y = f(x) \in f(A) \subset f(A \cup B)$ nên $y \in f(A \cup B)$
Nếu $x \in B$ thì $y = f(x) \in f(B) \subset f(A \cup B)$ nên $y \in f(A \cup B)$
Trong mọi trường hợp ta đều có $y \in f(A \cup B)$
$\boxed{\Leftarrow}$ Ta có $f(A) \subset f(A \cup B), f(B) \subset f(A \cup B)$ nên $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

b) Do $A \cap B \subset A$ nên $f(A \cap B) \subset f(A)$ và $A \cap B \subset B$ nên $f(A \cap B) \subset f(B)$. Vậy ta có $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Để chỉ ra phản ví dụ điều ngược lại không đúng ta xét ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ và $A = \{-1\}, B = \{1\}$. Khi đó $f(A \cap B) = \emptyset$ và $f(A) \cap f(B) = \{1\}$.

c)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \in A \\ f(x) \in B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in f^{-1}(A) \\ x \in f^{-1}(B) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in A \\ f(x) \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(A) \\ x \in f^{-1}(B) \end{cases} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \setminus B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in A \\ f(x) \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(A) \\ x \notin f^{-1}(B) \end{cases} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \end{aligned}$$

f) Ta đã có $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Ngược lại, nếu $y \in f(A) \cap f(B)$ thì $y \in f(A)$ và $y \in f(B)$. Do đó tồn tại $x_1 \in A$ sao cho $f(x_1) = y$ và tồn tại $x_2 \in B$ sao cho $f(x_2) = y$. Vì f là đơn ánh nên $x_1 = x_2 \in A \cap B$. Vậy $y = f(x_1) \in f(A \cap B)$. ■

Bài tập 1.14. Cho hai ánh xạ $f : A \to C$ và $g : B \to D$. Ta xác định ánh xạ $h : A \times B \to C \times D$ bởi $h(a,b) = (f(a), g(b)), a \in A, b \in B$

a) Chứng minh f, g đơn ánh thì h đơn ánh.

b) Chứng minh f, g toàn ánh thì h toàn ánh.

c) Các mệnh đề đảo của $a), b)$ có đúng không?

Lời giải. Dựa vào định nghĩa đơn ánh và toàn ánh dễ dàng chứng minh được các khẳng định trên. Chú ý rằng các mệnh đề đảo của mệnh đề $a)$ và $b)$ vẫn đúng. ■

Bài tập 1.15. [Đề thi ĐS K51] Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 + 1, 2x_1 + x_2)$. Chứng minh f là một song ánh.

Bài tập 1.16. [Đề thi ĐS K51] Cho các tập hợp X, Y, Z và các ánh xạ $f : X \to Y, g : Y \to Z$. Giả thiết f toàn ánh, $g \circ f$ đơn ánh. Chứng minh g là đơn ánh.

Bài tập 1.17. [Đề thi ĐS K52] Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2) = (4x_1, 5x_2)$. Chứng minh f là một song ánh. Xác định $f(A)$ với $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 9\}$.

§4. CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

4.1 Cấu trúc nhóm

Giả sử G là một tập hợp. Mỗi ánh xạ

$$\circ : G \times G \to G$$

được gọi là một *phép toán hai ngôi* (hay một *luật hợp thành*) trên G. Ảnh của cặp phần tử (x, y) được kí hiệu là $x \circ y$.

Định nghĩa 1.1. *Một nhóm là một tập hợp khác rỗng G được trang bị một phép toán hai ngôi $\circ$ thoả mãn ba điều kiện sau đây:*

(G1) *Phép toán có tính chất kết hợp:*

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in G$$

(G2) *Có một phần tử $e \in G$, được gọi là* phần tử trung lập *hay* phần tử trung hoà *với tính chất*

$$x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G$$

(G3) *Với mọi $x \in G$ tồn tại phần tử $x' \in G$ được gọi là* nghịch đảo *của x sao cho*

$$x \circ x' = x' \circ x = e$$

Nhóm G được gọi là nhóm giao hoán *hay* abel *nếu phép toán có tính chất giao hoán:*

$$x \circ y = y \circ x \forall x, y \in G.$$

4.2 Cấu trúc vành

Định nghĩa 1.2. *Một vành là một tập hợp $R \neq \emptyset$ được trang bị hai phép toán hai ngôi, gồm phép cộng*

$$+ : R \times R \to R, (x, y) \mapsto x + y$$

và phép nhân

$$. : R \times R \to R, (x, y) \mapsto xy,$$

thoả mãn ba điều kiện sau:

(R1) *R là một nhóm abel với phép cộng.*

(R2) *Phép nhân có tính chất kết hợp:*

$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in R$$

(R3) *Phép nhân phân phối từ hai phía đối với phép cộng:*

$$(x+y)z = xz + yz$$
$$z(x+y) = zx + zy, \forall x, y, z \in R$$

Vành R *được gọi là* giao hoán *hay* abel *nếu phép nhân có tính chất giao hoán:*

$$xy = yx \forall x, y \in R.$$

Vành R *được gọi là có đơn vị nếu phép nhân có đơn vị, tức tồn tại phần tử* $1 \in R$ *sao cho*

$$1x = x1 = x \forall x \in R.$$

Quy ước: Để thuận tiện về mặt kí hiệu, phần tử trung hoà của phép cộng sẽ được kí hiệu là 0, nếu vành có đơn vị thì phần tử đơn vị sẽ được kí hiệu là 1.

4.3 Cấu trúc trường

Định nghĩa 1.3. *Một vành giao hoán có đơn vị* $1 \neq 0$ *sao cho mọi phần tử khác 0 trong nó đều khả nghịch được gọi là một* trường*.*

Bài tập 1.18. Cho $G\{1,2\}$, trên G ta định nghĩa các phép toán như sau:

$$1+1=1, 1+2=2, 2+1=1, 2+2=1$$

Chứng minh rằng $(G,+)$ là một nhóm.

Bài tập 1.19. Cho $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ là tập các ánh xạ từ $\mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ xác định như sau:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{1-x}, f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}, f_4(x) = \frac{1}{x}, f_5(x) = 1-x, f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

Chứng minh G cùng với phép toán là phép hợp thành tích ánh xạ lập thành một nhóm không abel.

Lời giải. G0) Để kiểm tra một tập hợp cùng với các phép toán nào đó có phải là một cấu trúc đại số hay không, trước hết phải kiểm tra xem các phép toán trên tập hợp đó có phải là phép hợp thành không (có phải là phép toán đóng không), rồi sau đó mới đi kiểm tra các tiên đề của cấu trúc đại số đó. Đối với các tập hợp có hữu hạn phần tử người ta thường kiểm tra tính đóng của phép toán bằng phương pháp lập bảng.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

Nhìn vào bảng ta thấy phép hợp thành ánh xạ là phép toán đóng trên tập G.

G1) Phép hợp thành các ánh xạ có tính chất kết hợp.

G2) Phần tử trung hoà: f_1

G3) Phần tử đối:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
Phần tử đối	f_1	f_3	f_2	f_4	f_5	f_6

Hơn nữa $f_4 \circ f_2 = f_5 \neq f_6 = f_2 \circ f_4$ nên G là một nhóm không abel. ■

Bài tập 1.20. Các tập sau với các phép toán thông thường có lập thành một vành, trường không?

a) Tập các số nguyên lẻ.

b) Tập các số nguyên chẵn.

c) Tập các số hữu tỉ.

d) $X = \left\{ a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

e) $Y = \left\{ a + b\sqrt{3} \,|a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Lời giải. a) Tập các số nguyên lẻ không đóng với phép toán cộng nên không phải là một vành (trường).

b) Tập các số nguyên chẵn là một vành giao hoán nhưng không có đơn vị nên không phải là một trường.

c) Tập các số hữu tỉ là một trường.

d) $X = \left\{ a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{R} \right\}$ là một vành giao hoán, có đơn vị 1, nhưng không phải là môtj trường vì $\sqrt{2} \in X$ không có phần tử đối.

e) $Y = \left\{ a + b\sqrt{3} \,|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ là một trường. Chú ý rằng

$$\frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2} \in Y$$

§5. SỐ PHỨC

5.1 Dạng chính tắc của số phức

Kí hiệu $\mathbb{C} = \{z = a + bi\}$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$ là tập hợp các số phức. $z = a + bi$ được gọi là dạng chính tắc của số phức. $a = \operatorname{Re} z$ được gọi là phần thực của số phức và $b = \operatorname{Im} z$ được gọi là phần ảo của số phức.

Các phép toán trên dạng chính tắc của số phức

1. Phép cộng, trừ
$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

2. Phép nhân
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

3. Phép chia
$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi).(c + di)^{-1} = (a + bi).\left(\frac{-a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i\right)$$

5.2 Dạng lượng giác của số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm $M(a, b)$ trên mặt phẳng Oxy. Điểm M được gọi là ảnh của số phức z và (a, b) được gọi là toạ vị của số phức z. Khi đó đặt
$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM}| \\ \varphi = (Ox, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$$
Khi đó $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của số phức. r được gọi là độ dài của số phức z, kí hiệu là $|z|$ và φ được gọi là Argument của số phức, kí hiệu là $\operatorname{Arg} z$.

Các phép toán trên dạng lượng giác của số phức

1. Phép nhân

$$\text{Nếu } z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \text{ thì}$$
$$z_1z_2 = r_1r_2.[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$
$$\text{Vậy } |z_1z_2| = |z_1||z_2|, \operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

2. Phép chia

$$\text{Nếu } z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \text{ thì}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$\text{Vậy } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

3. Phép luỹ thừa (Công thức Moirve)

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = r^n.(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\text{Vậy } |z^n| = |z|^n$$

4. Phép khai căn
   Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ thì $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}.\left[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right], k = \overline{0, n-1}$
   Nhận xét rằng mỗi số phức $z \neq 0$ đều có n số căn bậc n khác nhau.

5.3 Số phức liên hợp

Cho số phức $z = a + bi$, số phức $\overline{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số phức z. Ở dạng lượng giác, số phức liên hợp của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là $\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$. Một số tính chất của số phức liên hợp:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z + \overline{z} = 2a = 2\operatorname{Re} z$
3. $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
5. $|\overline{z}| = |z|$
6. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
7. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
8. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Bài tập 1.21. Viết các số phức sau dưới dạng chính tắc:

a) $(1 + i\sqrt{3})^9$

b) $\sqrt[8]{1 - i\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}$

d) $(2 + i\sqrt{12})^5(\sqrt{3} - i)^{11}$

Lời giải. Thông thường, ta nên chuyển các số phức về dạng lượng giác, rồi thực hiện các phép toán nhân, chia, luỹ thừa, khai căn, sau đó mới đưa kết quả về dạng chính tắc.

a)
$$(1 + i\sqrt{3})^9 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^9 = -2^9$$

b) Ta có $(1 - i\sqrt{3}) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$ nên

$$\sqrt[8]{1 - i\sqrt{3}} = \left\{z_k = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}\right) + i\sin(\left(\frac{-\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}\right)\right], k = \overline{0,7}\right\}$$

c) Tương tự, $\frac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}} = 2^4 i$

d) $(2+i\sqrt{12})^5(\sqrt{3}-i)^{11} = (-2^{11})i.$ ■

Bài tập 1.22. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $z^2+z+1=0$ b) $z^2+2iz-5=0$ c) $z^4-3iz^2+4=0$

d) $z^6-7z^3-8=0$ e) $\dfrac{(z+i)^4}{(z-i)^4}=1$ f) $z^8(\sqrt{3}+i)=1-i$

Bài tập 1.23. Chứng minh nếu $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ thì $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta, \forall n\in\mathbb{Z}$

Lời giải. Với điều kiện $z\neq 0$ thì

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Leftrightarrow z^2-2\cos\theta.z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=z_1=\cos\theta+i\sin\theta \\ z=z_2=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\end{array}\right.$$

Hơn nữa $z_1z_2=1$ nên

$$z^n+\frac{1}{z^n}=z_1^n+z_2^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+[\cos(-\theta+i\sin(-\theta)^n]=2\cos\theta$$

Bài tập 1.24. a) Tính tổng các căn bậc n của 1.

b) Tính tổng các căn bậc n của số phức z bất kỳ.

c) Cho $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, k=0,1,...,(n-1)$. Tính tổng $S=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k^m, (m\in\mathbb{Z})$.

Lời giải. a) Gọi $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ là các căn bậc n của 1. Các căn bậc n của đơn vị sẽ lập thành tập nghiệm của phương trình $z^n-1=0$ nên theo định lý Viet

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k=0$$

Ngoài ra

$$\sum_{0\le i<j\le n-1}\varepsilon_i\varepsilon_j=0,\quad \Pi_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k=(-1)^{n-1}$$

b) Tương tự $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k=0$

c) $S=\begin{cases}0 \text{ nếu } n\not| m\\ n \text{ nếu } n|m\end{cases}$ ■

Bài tập 1.25. Cho phương trình $\frac{(x+1)^9-1}{x}=0$.

a) Tìm các nghiệm của phương trình trên.

b) Tính môđun của các nghiệm.

c) Tính tích của các nghiệm từ đó tính $\prod\limits_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9}$.

Lời giải.

a) Phương trình $\frac{(x+1)^9-1}{x}=0$ có 8 nghiệm là

$$x_k=-1+\cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{9}\right),k=1,2,\ldots,8$$

Chú ý rằng với $k=0$ thì $x=0\notin$ TXD.

b) Ta có $|x_k|=2\sin\left(\frac{k\pi}{9}\right)$

c) Phương trình $\frac{(x+1)^9-1}{x}=\sum\limits_{i=1}^{9}C_9^i x^{i-1}=0$ có 8 nghiệm là $x_k,k=1,2,\ldots,8$ nên áp dụng định lý Viet ta có

$$\prod_{k=1}^{8}x_k=9$$

Từ đó suy ra

$$\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9}=\frac{9}{2^8}$$

Bài tập 1.26. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $\overline{z^7}=\dfrac{1}{z^3}$ b) $z^4=z+\overline{z}$.

Lời giải. a) $\overline{z^7}=\frac{1}{z^3}\Rightarrow\overline{z^7}z^3=1\Rightarrow|\overline{z^7}z^3|=1\Rightarrow|z|^{10}=1\Rightarrow|z|=1$. Do đó $\overline{z}=\frac{|z|^2}{z}=\frac{1}{z}$. Từ đó $\overline{z^7}=\frac{1}{z^3}\Leftrightarrow z^4=1\Leftrightarrow z=z_k=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2},k=1,2,3$.

b) Giả sử $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Khi đó $z^4=z+\overline{z}\Leftrightarrow(a+bi)^4=(a+bi)+(a-bi)$. So sánh phần thực và phần ảo của hai vế ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^4-6a^2b^2+b^4=2a\\4a^3b-4ab^3=0\end{cases}$$

∎

Giải hệ phương trình trên ta được các nghiệm của phương trình là

$$z_1=0,z_2=\sqrt[3]{2},z_3=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}i,z_4=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}i$$

Bài tập 1.27. Cho x, y, z là các số phức có môđun bằng 1. So sánh môđun của các số phức $x + y + z$và $xy + yz + zx$.

Lời giải. Do $|z| = |y| = |z| = 1$ nên $x\overline{x} = y\overline{y} = z\overline{z} = 1$. Do đó

$$|xy + yz + zx| = |xyz\overline{z} + yzx\overline{x} + zxy\overline{y}| = |xyz(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})| = |xyz|.|\overline{x + y + z}| = |x + y + z|$$

CHƯƠNG 2

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. MA TRẬN

1.1 Các phép toán trên ma trận

1. Phép cộng, trừ hai ma trận
2. Phép nhân ma trận với một số
3. Phép nhân hai ma trận
4. Ma trận chuyển vị

1.2 Các tính chất

1. $\begin{cases} A+B=B+A \\ A+0=0+A=A \\ A+(-A)=(-A)+A=0 \\ (A+B)+C=A+(B+C) \end{cases}$

2. $\begin{cases} k(A+B)=kA+kB \\ (k+h)A=kA+hA=A \\ k(hA)=(kh)A \\ 1.A=A \\ 0.A=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (A.B).C=A.(B.C) \\ A.I=I.A=A \\ \text{Chú ý rằng } AB\neq BA \end{cases}$

4. $\begin{cases} A.(B+C)=AB+AC) \\ (A+B)C=AC+BC \\ (AB)C=A(BC) \\ k(BC)=(kB)C=B(kC) \end{cases}$

5. $(AB)^t = B^t A^t$

Bài tập 2.1. Tìm ma trận X thoả mãn:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

b)

$$\frac{1}{2}X - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

Lời giải. a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$$\frac{1}{2}X - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 12 \\ -4 & 18 & 4 \\ -8 & -16 & 12 \end{bmatrix}$$

■

Bài tập 2.2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính $f(A)$.

Lời giải. Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = 3A^2 - 2A + 5E = 3\begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 13 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 21 & -23 & 24 \\ -5 & 34 & 13 \\ 0 & 7 & 38 \end{bmatrix}$$

■

Bài tập 2.3. a) Cho $A = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$. Tính A^n.

b) Cho $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. Tính A^n.

Lời giải. a) Chứng minh $A^n = \begin{bmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{bmatrix}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ bằng phương pháp qui nạp.

b) Với $n = 1$, $A^1 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

Với $n \geq 2$ ta viết $A = B + E$, với E là ma trận đơn vị cấp 3 và $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ta có $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^3 = 0$ nên $B^k = 0$ với mọi $k \geq 3$. Áp dụng công thức khai triển Newton:

$$A^n = (B + aE_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (aE_3)^{n-k} = C_n^0 (aE_3)^n + C_n^1 B (aE_3)^{n-1} + C_n^2 B^2 (aE_3)^{n-2}$$
$$= a^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + na^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(n-1)n}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{(n-1)n}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Nhận xét: Ta cũng có thể chứng minh câu $b)$ bằng quy nạp như câu $a)$. Tuy nhiên, muốn dùng phương pháp quy nạp ta cần dự đoán được kết quả của bài toán. Điều này không phải lúc nào cũng dễ làm. ■

Bài tập 2.4. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn:

a) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lời giải. a) Giả sử $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ta có $X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$.

Vậy:

$$\begin{cases} a^2+bc &= 0 \\ ab+bd &= 0 \\ ca+dc &= 0 \\ cb+d^2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc &= 0 \\ b(a+d) &= 0 \\ c(a+d) &= 0 \\ cb+d^2 &= 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ hoặc $X = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$ với a, b, c là các số thực tùy ý và $b \neq 0$

b) Tương tự như câu a), ma trận X có thể có các dạng sau:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 1-\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

■

§2. ĐỊNH THỨC

2.1 Định nghĩa

2.2 Các tính chất của định thức

1. $\det A = \det A^t$

2. Công thức khai triển một định thức theo một hàng hay cột bất kì:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Ở đó M_{ij} là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j.

3. Một định thức có hai hàng (hay cột) bằng nhau thì bằng không.

4. Nếu đổi chỗ hai hàng (hay cột) của một ma trận thì định thức của nó đổi dấu

5. Nếu thêm vào một hàng (hay cột) một tổ hợp tuyến tính của các hàng (hay cột) khác thì định thức không đổi.

6. Một định thức có một hành (hay cột) bằng 0 thì bằng 0.

7. Nếu nhân các phần tử của một hàng (hay cột) với một số k thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với k.

8. Định thức của một ma trận tam giác bằng tích của các phần tử trên đường chéo.

9. $\det(AB) = \det A \det B$

2.3 Các phương pháp tính định thức

Để tính một định thức, có thể khai triển định thức theo một hàng hay cột nào đó để đưa định thức về định thức có cấp nhỏ hơn (tất nhiên nên chọn hàng hay cột nào có nhiều số 0 nhất), cũng có thể tìm cách biến đổi sơ cấp để đưa định thức về dạng đơn giản hơn (không nhất thiết phải đưa định thức về dạng định thức của ma trận tam giác, đôi khi chỉ cần đưa định thức về dạng đơn giản rồi khai triển định thức).

2.4 Ma trận nghịch đảo

1. Định nghĩa

   Định nghĩa 2.4. *Cho A là một ma trận vuông cấp n, nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho*
   $$AB = BA = I$$
   thì ta nói ma trận A khả đảo (khả nghịch) và gọi B là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

   Ma trận nghịch đảo của ma trận A được kí hiệu là A^{-1}.

2. Sự duy nhất của ma trận nghịch đảo

   Định lý 2.1. *Ma trận nghịch đảo của ma trận A nếu có thì duy nhất.*

3. Sự tồn tại của ma trận nghịch đảo

Định lý 2.2. *Cho ma trận A vuông cấp n, nếu $\det A \neq 0$ thì ma trận A khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó được tính theo công thức:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.C^t,$$

trong đó $C = [c_{ij}]$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

4. Ma trận nghịch đảo của tích hai ma trận

   Định lý 2.3. *Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n khả nghịch. Khi đó AB cũng khả nghịch và*

   $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

5. Các tính ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss-Jordan

   (a) Viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A.

   (b) Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A về ma trận đơn vị I, đồng thời tác động phép biến đổi sơ cấp trên ma trận I.

   (c) Khi A đã biến đổi thành I thì I trở thành ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Bài tập 2.5. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bac + bac - c^3 - b^3 - a^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, $\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ Do ε là căn bậc 3 của đơn vị nên $\begin{cases} \varepsilon^3 = 1 \\ 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0 \end{cases}$.

Do đó $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix} = 1 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - 1 - \varepsilon^3 = -3$

Bài tập 2.6. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức để chứng minh:

a) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

Lời giải. a)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} 2a_1 & a_1-b_1x & c_1 \\ 2a_2 & a_1-b_1x & c_2 \\ 2a_3 & a_1-b_1x & c_3 \end{vmatrix} (C_2+C_1 \to C_1) \\
=2&\begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2 & a_1-b_1x & c_2 \\ a_3 & a_1-b_1x & c_3 \end{vmatrix} (C_1 \times \frac{1}{2}) \\
=2&\begin{vmatrix} a_1 & -b_1x & c_1 \\ a_2 & -b_2x & c_2 \\ a_3 & -b_3x & c_3 \end{vmatrix} ((-1)C_1+C_2 \to C_2) \\
=&-2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+ab+bc+ca \\ 1 & b & b^2+ab+bc+ca \\ 1 & c & c^2+ab+bc+ca \end{vmatrix} (C_2 \times (a+b+c)+C_3 \to C_3) \\
=&\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} (C_1 \times (-ab-bc-ca)+C_3 \to C_3)
\end{aligned}$$

Chú ý: Nếu $a, b, c \neq 0$ thì ta có thể chứng minh như sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & a^2 & abc \\ b & b^2 & abc \\ c & c^2 & abc \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}abc\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} 1 & a & a^3+a^2b+a^2c \\ 1 & b & b^3+b^2a+b^2c \\ 1 & c & c^3+c^2a+c^2b \end{vmatrix} (C_1 \times (-abc) + C_2 \times (ab+bc+ca) + C_3 \to C_3) \\
=&\begin{vmatrix} 1 & a & a^2(a+b+c) \\ 1 & b & b^2(a+b+c) \\ 1 & c & c^2(a+b+c) \end{vmatrix} \\
=&(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

■

Bài tập 2.7. Tính các định thức sau:

a) $A = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & a^2+c^2 \end{vmatrix}$ b) $B = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

c) $C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$ d) $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$

Lời giải. a) $A = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & a^2+c^2 \end{vmatrix} = a^3(c^2-b^2) + b^3(a^2-c^2) + c^3(b^2-a^2)$

b)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c+d & b+a+c+d & c+d+a+b & d+c+b+a \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} (R_1+R_2+R_3+R_4)$$

$$=(a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & a-d \end{vmatrix} (C_2-C_1, C_3-C_1, C_4-C_1)$$

$$=(a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & d-b & c-b \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d) \begin{vmatrix} a+d-c-b & a+d-c-b & 0 \\ d-c & a-c & b-c \\ c-d & b-d & a-d \end{vmatrix} (R_2+R_1)$$

$$=(a+b+c+d) \begin{vmatrix} a+d-c-b & 0 & 0 \\ d-c & a-d & b-c \\ c-d & b-c & a-d \end{vmatrix} (C_2-C_1)$$

$$=(a+b+c+d)(a+d-c-b) \begin{vmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+d-b-c)(a+b-d-c)(a+c-b-d)$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2-x^2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 9-x^2 \end{vmatrix} (C_2 \leftrightarrow C_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2-x^2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 9-x^2 \end{vmatrix} (R_2 \leftrightarrow R_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3-x^2 \end{vmatrix} (R_2 - 2R_1, R_3 - R_1, R_4 - 2R_1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= -3.(1-x^2)(4-x^2)$$

d)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} (H_1 - H_2, H_3 - H_4)$$

■

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -z \end{vmatrix} (C_1 - C_2, C_3 - C_4)$$

$$= x^2 z^2$$

Bài tập 2.8. Chứng minh nếu A là ma trận phản xứng cấp n lẻ thì $\det(A) = 0$.

Lời giải. Do $A^t = -A$ nên $\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Vậy $\det A = 0$. ∎

Bài tập 2.9. Cho $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là ma trận phức sao cho $a_{ij} = -a_{ji}$. Chứng minh $\det(A)$ là một số thực.

Lời giải. Theo bài ra, $A^t = \bar{A}$, vì định thức của một ma trận là tổng các số hạng trong đó mỗi số hạng là tích các phần tử của ma trận đó, nên từ tính chất của số phức liên hợp, ta có $\det \bar{A} = \overline{\det A}$. Từ đó ta có

$$\overline{\det A} = \det \bar{A} = \det A^t = \det A \Rightarrow \det A \in \mathbb{R}$$

Bài tập 2.10. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hướng dẫn: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A có $\det A \neq 0$ thường tiến hành theo hai cách:
Cách 1: Dùng ma trận phụ hợp.
Tính $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ trong đó M_{ij} là ma trận có được từ A bằng cách bỏ đi hàng i cột j. Xây dựng ma trận phụ hợp $C = [c_{ij}]$. Khi đó $A^{-1} = \frac{1}{\det A}.C^t$.
Cách 2: Phương pháp Gauss-Jordan. Viết vào sau ma trận A ma trận đơn vị E để được ma trận $[A|E]$, sau đó sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng đưa ma trận trên về ma trận $[E|B]$. Khi đó, B là ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Lời giải. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.Tổng quát, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

b) $B^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 11 \\ 1 & -12 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ∎

Bài tập 2.11. Giải các phương trình ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Hướng dẫn: Việc giải các phương trình ma trận cũng giống như việc giải các phương trình đại số, nhưng cần lưu ý phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán nên

$$\begin{cases} AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \\ XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} \end{cases}$$

Bài tập 2.12. a) Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình sau: $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$.

b) Chứng minh với A là ma trận vuông cấp 2 thì $A^k = 0, (k > 2) \Leftrightarrow A^2 = 0$.

Lời giải. b) Nhận xét rằng ta chỉ cần chứng minh nếu $A^k = 0 (k > 2)$ thì $A^2 = 0$. Thật vậy,

$$(\det A)^k = \det A^k = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow ac - bd = 0.$$

Do đó từ câu a) ta có $A^2 + (a+d)A = 0 \quad (1)$.

Nếu $a + d = 0$ thì $(1) \Rightarrow A = 0$.

Nếu $a + d \neq 0$ thì $(1) \Rightarrow A^{k-2}[A^2 + (a+d)A] = 0 \Rightarrow (a+d)A^{k-1} = 0 \Rightarrow A^{k-1} = 0$. Tiếp tục quá trình như vậy ta được $A^k = A^{k-1} = ... = A^2 = 0$. ■

Bài tập 2.13. Chứng minh rằng ma trận A vuông cấp n thoả mãn $a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = 0, (a_0 \neq 0)$ thì A là ma trận khả nghịch.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = 0 \\ \Leftrightarrow & a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A = -a_0 E \\ \Leftrightarrow & A\left(-\frac{a_k}{a_0} A^k - \frac{a_{k-1}}{a_0} A^{k-1} - \cdots - \frac{a_1}{a_0} E\right) = E \end{aligned}$$

■

Do đó A là ma trận khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó là

$$A^{-1} = -\frac{a_k}{a_0} A^k - \frac{a_{k-1}}{a_0} A^{k-1} - \cdots - \frac{a_1}{a_0} E$$

§3. HẠNG CỦA MA TRẬN

3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.5. *Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A, kí hiệu $r(A)$ hay $\rho(A)$.*

3.2 Phương pháp tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp về hàng

Định nghĩa 2.6. *Ma trận bậc thang là ma trận có hai tính chất:*

1. *Các hàng khác không luôn ở trên các hàng bằng không*
2. *Trên hai hàng khác không thì phần tử đầu tiên khác không ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.*

Định lý 2.4. *Hạng của một ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó*

Với định lý 2.4 đã cho, muốn tìm hạng của ma trận A chỉ cần áp dụng các phương pháp biến đổi sơ cấp trên hàng đề đưa A về ma trận bậc thang và đếm số hàng khác không của nó.

Bài tập 2.14. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$. Biến đổi $A \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ nên $r(A) = 4$.

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$. Biến đổi $B \to \ldots \to \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nên $r(B) = 3$.

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

4.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Đó là hệ m phương trình đại số bậc nhất đối với n ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Nếu đặt $A = [a_{ij}]$ là ma trận hệ số của hệ và $b = [b_1 b_2 \ldots b_m]^t$ là ma trận cột vế phải, $x = [x_1 x_2 \ldots x_n]^t$ là ma trận ẩn thì ta có dạng ma trận của hệ được viết đơn giản như sau

$$Ax = b$$

4.2 Hệ Cramer

Định nghĩa 2.7. *Hệ 2.1 gọi là hệ Cramer nếu* $m = n$ *và* $\det A \neq 0$

Định lý 2.5 (Định lý Cramer). *Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được tính bằng công thức* $x = A^{-1}b$, *tức là*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

trong đó A_j *là ma trận suy từ* A *bằng cách thay cột thứ* j *bởi cột vế phải* b.

4.3 Định lý Kronecker-Capelli

Định lý 2.6 (Định lý Kronecker-Capelli). *Hệ 2.1 có nghiệm khi và chỉ khi*

$$r\left(\overline{A}\right) = r(A),$$

trong đó $\overline{A}$ *là ma trận bổ sung tức là ma trận* A *thêm cột* b, $\overline{A} = [Ab]$.

Corollary 2.1.

1. *Nếu* $r\left(\overline{A}\right) \neq r(A)$ *thì hệ 2.1 vô nghiệm*
2. *Nếu* $r\left(\overline{A}\right) = r(A) = n$ *thì hệ 2.1 có nghiệm duy nhất*
3. *Nếu* $r\left(\overline{A}\right) = r(A) < n$ *thì hệ 2.1 có vô số nghiệm*

4.4 Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

B1. Viết ma trận A cạnh véctơ cột b ta được ma trận bổ sung $\overline{A}$.

B2. Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đề đưa ma trận A về ma trận bậc thang.

B3. Biện luận theo kết quả thu được.

Bài tập 2.15. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

Lời giải. a) Ta có $D = 7, D_x = 7, D_y = -7, D_z = 7$ nên hệ phương trình đã cho là hệ Cramer nên nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$

b) Tương tự như câu a) với $D = 41, D_{x_1} = 41, D_{x_2} = -41, D_{x_3} = 41$ và nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$.

c) $r(A) = 2 \neq r(\overline{A}) = 3$. Hệ vô nghiệm.

d) Hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = \left(0, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)$.

e) Hệ có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = \left(-7t + \frac{7}{11}, -10t - \frac{1}{11}, 11t\right)$ với t là tham số. ■

Bài tập 2.16. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss.

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 6 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$

Hướng dẫn: Các phép biến đổi tương đương trên các phương trình của hệ tuyến tính tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp theo hàng trên ma trận $\bar{A}$. Hơn nữa, việc xác định tính có nghiệm hay vô nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính theo định lí Kronecker-Capelli, đòi hỏi phải tìm hạng của ma trận $\bar{A}$. Nội dung chính của phương pháp Gauss chính là việc sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để biến đổi ma trận $\bar{A}$ về dạng bậc thang, sau đó dùng định lí Kronecker-Capelli để xác định việc có nghiệm và mô tả các nghiệm của hệ phương trình.

Lời giải. a) $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & -7 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 \end{array}\right]$

Vậy $r(A) = r(\overline{A}) = 4$. Do đó, hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 2, 0)$.

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Vậy $r(A) = 3 < 4$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số $\begin{cases} x_1 = 14\alpha \\ x_2 = -7\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases}$

c) $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$

Suy ra $r(A) = r(\overline{A}) = 2$, nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 3 tham số

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + 2m - 4n \\ x_2 = \frac{1}{6} + 5m - n + t \\ x_3 = 2t, x_4 = 2n, x_5 = 6m \end{cases}$$

Bài tập 2.17. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2-a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-a)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-a)x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - ax_2 + a^2x_3 = a \\ ax_1 - a^2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 - a^3x_3 = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$

Lời giải. a)

Ta có

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a^2 \end{array}\right]$$
$$\to \ldots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & a & 1 & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a-a^2 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 1-a & (1-a)(a+1)^2 \end{array}\right]$$

1. Nếu $a \neq 1$, ta có $r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 4$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số $\begin{cases} x_1 = t - a - 1 \\ x_2 = t - a \\ x_3 = t \\ x_4 = (1+a)^2 - (a+2)t \end{cases}$

2. Nếu $a = 1$ thì $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

   Ta có $r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 4$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 3 tham số $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - \alpha - \beta - \gamma, \beta, \alpha, \gamma)$

b) Ta có $A = \begin{bmatrix} 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & 2-a \end{bmatrix}$, $\det A = (4-a)(1-a)^2$.

1. Nếu $(4-a)(1-a)^2 \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

2. Nếu $a = 4$ thì $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Vì $r(A) = 2 < 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 1 tham số $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \alpha, \alpha)$

3. Nếu $a = 1$ thì $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   Suy ra $r(A) = 1 < 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 2 tham số: $(x_1, x_2, x_3) = (-\alpha - \beta, \beta, \alpha)$.

c) Ta có $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ a & -a^2 & a & 1 \\ a & 1 & -a^3 & 1 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & a^2 & a \\ 0 & 1+a^2 & -2a^3 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a(1-a^2) & 1-a^2 \end{array}\right]$

1. Nếu $a \neq 0, \pm 1$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{1}{a} \end{cases}$
2. Nếu $a = 0$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ nên $r(A) = 2 \neq r(\overline{A}) = 3$, do đó hệ đã cho vô nghiệm.
3. Nếu $a = 1$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
   nên $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$, hệ đã cho có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số $(x_1, x_2, x_3) = (1, \alpha, \alpha)$
4. Nếu $a = -1$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
   nên $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$, hệ đã cho có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số $(x_1, x_2, x_3) = (1, -\alpha, \alpha)$

d) Ta có

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & (1-a)(a+1)^2 \end{array}\right] = B$$

1. Nếu $a \neq 1, -2$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$, hệ có nghiệm duy nhất
$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-1-a}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(1+a)^2}{a+2}\right)$$
2. Nếu $a = -2$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$, $r(A) = 2 < 3 = r(\overline{A})$, hệ đã cho vô nghiệm.

3. Nếu $a = 1$ thì $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 3$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số $(x_1, x_2, x_3) = (1 - \alpha - \beta, \beta, \alpha)$ ∎

Bài tập 2.18. Tìm đa thức bậc 3 : $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thoả mãn $p(1) = 0, p(-1) = 4, p(2) = 5, p(-2) = -15$.

Lời giải. Đáp số: $a = \frac{7}{3}, b = \frac{-7}{3}, c = \frac{-13}{3}, d = \frac{13}{3}$. ∎

Bài tập 2.19. Cho phương trình ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 7 & 2a+1 \\ 3 & 9 & 4a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Giải phương trình khi $a = 0$.

b) Tìm a để phương trình có vô số nghiệm.

Lời giải. a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -1 \\ 2 & 7 & 2a+1 & 2 \\ 3 & 9 & 4a & 1 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right]$

Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A}) < 3 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ∎

CHƯƠNG 3

KHÔNG GIAN VÉCTƠ.

§1. KHÁI NIỆM

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.8. *Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là một* không gian véctơ *trên* $\mathbb{R}$ *nếu nó được trang bị hai phép toán gồm:*

a) Phép cộng véctơ

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta \end{aligned}$$

b) Phép nhân véctơ với vô hướng

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times V &\to V \\ (a, \alpha) &\mapsto a\alpha \end{aligned}$$

thoả mãn các tiên đề sau:

(V1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(V2) $\exists 0 \in V : 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha \forall \alpha \in V$

(V3) $\forall \alpha \in V, \exists \alpha' \in V : \alpha' + \alpha = \alpha + \alpha' = 0$

(V4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \forall \alpha, \beta \in V$

(V5) $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha \forall a, b \in \mathbb{R}, \alpha \in V$

(V6) $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta \forall a \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in V$

(V7) $a(b\alpha) = (ab)\alpha \forall a, b \in \mathbb{R}, \alpha \in V$

(V8) $1\alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in V$

Các phần tử của V được gọi là các véctơ, các phần tử của $\mathbb{R}$ được gọi là các vô hướng. Bốn tiên đề đầu nói rằng $(V, +)$ là một nhóm abel. Tiên đề $(V5, 6)$ nói rằng phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng véctơ và cộng vô hướng. Tiên đê $(V8)$ nói rằng phép nhân đã được chuẩn hoá.

1.2 Một số tính chất ban đầu của không gian véctơ

1.3 Bài tập

Bài tập 3.1. Tập V với các phép toán kèm theo có phải là không gian véctơ không?

a) $V = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ với các phép toán xác định như sau

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$k(x, y, z) = (|k|\, x, |k|\, y, |k|\, z)$$

b) $V = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ với các phép toán xác định như sau:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

$$k(x_1, x_2) = (x_1^k, x_2^k)$$

trong đó k là số thực bất kỳ

Lời giải. a) V không phải là một không gian véctơ vì các phép toán cộng và nhân với vô hướng của V vi phạm tiên đề số 5.

$$(1 + (-1))(x, y, z) = 0 \neq 1(x, y, z) + (-1)(x, y, z) = 2(x, y, z)$$

b) Tập V đã cho là một không gian véctơ. ∎

§2. KHÔNG GIAN VÉCTƠ CON

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.9. *Cho V là một không gian véctơ, W là một tập con của V. Nếu W cùng với hai phép toán thừa hưởng từ V cũng là một không gian véctơ thì W được gọi là không gian véctơ con của V.*

2.2 Điều kiện cần và đủ để $W \subset V$ là không gian véctơ con

Định lý 3.7. *Tập con khác rỗng $W \subset V$ là không gian véctơ con của V nếu và chỉ nếu W khép kín với hai phép toán trên V, nghĩa là*

$$\begin{cases} \alpha + \beta \in W, & \forall \alpha, \beta \in W \\ a\alpha \in W, & \forall a \in \mathbb{R}, \alpha \in W \end{cases}$$

2.3 Không gian con sinh bởi một họ véctơ

Định nghĩa 3.10. *Cho V là một không gian véctơ. $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một họ các véctơ của V. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véctơ của S được gọi là bao tuyến tính của S, kí hiệu* $\operatorname{span}(S)$.

$$\operatorname{span}(S) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \dots c_nv_n | c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

Định lý 3.8. $W = \operatorname{span}(V)$ *là một không gian véctơ con của V.*

2.4 Hệ sinh của một không gian véctơ

Định nghĩa 3.11. *Cho V là một không gian véctơ.$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một họ các véctơ của V. Nếu* $\operatorname{span}(S) = V$ *thi ta nói họ S sinh ra V hay không gian V sinh bởi họ S.*

2.5 Bài tập

Bài tập 3.2. Chứng minh các tập hợp con của các không gian véc tơ quen thuộc sau là các không gian véc tơ con của chúng:

a) Tập $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \,|2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0\right\}$.

b) Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 (hệ số của x)của KGVT $P_n\,[x]$.

c) Tập các ma trận tam giác trên của tập các ma trận vuông cấp n.

d) Tập các ma trận đối xứng của tập các ma trận vuông cấp n.

e) Tập các ma trận phản xứng của tập các ma trận vuông cấp n.

f) Tập các hàm khả vi trong không gian các hàm số xác định trên $[a,b]$.

Bài tập 3.3. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Chứng minh:

a) $V_1 \cap V_2$ là KGVT con của V.

b) Cho $V_1 + V_2 := \{x_1 + x_2 \,|x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$. Chứng minh $V_1 + V_2$ là KGVT con của V.

Lời giải.

a)
1. Giả sử $x, y \in V_1 \cap V_2$. Khi đó $x, y \in V_1$ và $x, y \in V_2$. Vì V_1 và V_2 là các không gian véctơ con của V nên $x + y \in V_1$, và $x + y \in V_2$. Vậy $x + y \in V_1 \cap V_2$.
2. Tương tự nếu $x \in V_1 \cap V_2$ thì $kx \in V_1 \cap V_2$.

b)
1. Giả sử $x, y \in V_1 + V_2$. Khi đó $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ với $x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$. Khi đó $x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in V_1 + V_2$.
2. Tương tự, nếu $x \in V_1 + V_2$ thì $kx \in V_1 + V_2$. ■

Bài tập 3.4. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Ta nói V_1, V_2 là bù nhau nếu $V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Chứng minh rằng V_1, V_2 bù nhau khi và chỉ khi mọi véc tơ x của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = x_1 + x_2$, $(x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$.

Lời giải. $\boxed{\Rightarrow}$ Vì $V = V_1 + V_2$ cho nên mỗi véctơ $x \in V$ có biểu diễn $x = x_1 + x_2 (x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$. Ta chỉ cần chứng minh biểu diễn này là duy nhất, thật vậy, giả sử $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ với $x_1, x_1' \in V_1, x_2, x_2' \in V_2$. Khi đó ta có $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$. Nhưng vì V_1, V_2 là các không gian véctơ con của V nên $x_1 - x_1' \in V_1, x_2' - x_2 \in V_2$. Do đó $x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$ Vậy $x_1 = x_1', x_2 = x_2'$ và ta có biểu diễn đã cho là duy nhất.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nếu mọi véc tơ x của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = x_1 + x_2$, $(x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$ thì đương nhiên $V = V_1 + V_2$. Ta chỉ cần chứng minh $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Thật vậy, giả sử $x \in V_1 \cap V_2$, khi đó

$$x = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{x}_{\in V_2} = \underbrace{x}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2}$$

Vì tính duy nhất của biểu diễn nên $x = 0$, hay $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. ■

Bài tập 3.5. Cho V là KGVT các hàm số xác định trên $[a,b]$. Đặt

$$V_1 = \{f(x) \in V \mid f(x) = f(-x), \forall x \in [a,b]\}, V_2 = \{f(x) \in V \mid f(x) = -f(-x), \forall x \in [a,b]\}$$

Chứng minh V_1, V_2 là bù nhau.

Lời giải. Đương nhiên $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ (chú ý rằng véctơ 0 ở đây là hàm số đồng nhất bằng 0 trên $[a,b]$). Mặt khác với mỗi hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$ bất kì, đặt

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

thì $g(x) \in V_1, h(x) \in V_2$ và $f(x) = g(x) + h(x)$, nghĩa là $V = V_1 + V_2$. Ta có điều phải chứng minh. ■

§3. Cơ sở và toạ độ

3.1 Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 3.12 (Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính).

a) *Hệ* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *được gọi là* độc lập tuyến tính *nếu hệ thức*

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots a_n\alpha_n = 0$$

chỉ xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

b) *Hệ* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *được gọi là* phụ thuộc tuyến tính *nếu nó không độc lập tuyến tính.*

3.2 Cơ sở và số chiều của không gian véctơ

Định nghĩa 3.13. *Một hệ véctơ của V được gọi là một cơ sở của V nếu mỗi véctơ của V đều biểu thị duy nhất qua hệ này.*

Như vậy mỗi cơ sở đều là một hệ sinh.

Định lý 3.9. *Cho hệ véctơ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ của V. Khi đó S là một cơ sở của V khi và chỉ khi nó là một hệ sinh độc lập tuyến tính.*

Định nghĩa 3.14. *Không gian véctơ V được gọi là hữu hạn sinh nếu nó có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử.*

Định lý 3.10. *Giả sử $V \neq \emptyset$ là một không gian véctơ hữu hạn sinh. Khi đó V có một cơ sở gồm hữu hạn phần tử. Hơn nữa mọi cơ sở của V đều có số phần tử bằng nhau.*

Trên cơ sở định lý trên, ta đi đến định nghĩa sau

Định nghĩa 3.15. a) *Số phần tử của mỗi cơ sở của không gian véctơ hữu hạn sinh $V \neq \{0\}$ được gọi là* số chiều hay thứ nguyên *của không gian véctơ V, kí hiệu là* $\dim V$. *Nếu $V = \{0\}$ thì* $\dim V = 0$.

b) *Nếu V không có một cơ sở nào gồm hữu hạn phần tử thì nó được gọi là một không gian véctơ* vô hạn chiều.

Định nghĩa 3.16 (Toạ độ). *Bộ vô hướng $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ xác định bởi điều kiện $\alpha = \sum_i a_i\alpha_i$ được gọi là toạ độ của véctơ α trong cơ sở $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$*

3.3 Bài tập

Bài tập 3.6. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V, $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ là hệ sinh của V_1, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của V_2. Chứng minh $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của $V_1 + V_2$.

Lời giải. Mỗi $x \in V_1 + V_2$ ta có $x = x_1 + x_2 (x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$. Vì $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ là hệ sinh của V_1, nên $x_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của V_2 nên $x_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$. Vậy

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$$

Vậy $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của $V_1 + V_2$. ■

Bài tập 3.7. Trong KGVT V, cho hệ véctơ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

Lời giải. Vì hệ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại ràng buộc tuyến tính không tầm thường

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n+1} u_{n+1} = 0$$

1. Nếu $\lambda_{n+1} = 0$ thì $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$. Vì $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính nên từ ràng buộc tyến tính trên ta suy ra $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Điều này mâu thuẫn với $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ không đồng thời bằng 0.

2. Vậy $\lambda_{n+1} \neq 0$. Khi đó

$$u_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n)$$

Bài tập 3.8. Trong $\mathbb{R}^3$ xét xem các hệ véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 6, 7)$.

b) $v_1 = (4, -2, 6), v_2 = (-6, 3, -9)$.

c) $v_1 = (2, 3, -1), v_2 = (3, -1, 5), v_3 = (-1, 3, -4)$.

Lời giải. a) Xét ràng buộc tuyến tính

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ $\{v_1, v_2\}$ độc lập tuyến tính.

b) Tương tự, hệ đã cho độc lập tuyến tính.

c) Xét ràng buộc tuyến tính

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 5\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho độc lập tuyến tính. ■

Bài tập 3.9. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,2), v_3 = (1,2,3)$ lập thành một cơ sở. Cho $x = (6,9,14)$, tìm toạ độ của x đối với cơ sở trên.

Lời giải. Ta đã biết $\dim\mathbb{R}^3 = 3$ nên muốn chứng minh hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ ta chỉ cần chứng minh nó độc lập tuyến tính hoặc là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$. ■

§4. Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi họ véctơ - Hạng của họ véctơ

4.1 Mở đầu

Giả sử V là một không gian véctơ và

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \subset V$$

Theo định lý 3.8 thì span$S$ là một không gian con của V. Hãy tìm số chiều và cơ sở của span$S$.

4.2 Hạng của một họ véctơ

Định nghĩa 3.17. *Xét họ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\} \subset V$. Số véctơ độc lập tuyến tính tối đa có thể rút ra từ họ S được gọi là hạng của họ S và kí hiệu là $r(S)$ hay $\rho(S)$.*

4.3 Cách tính hạng của một họ véctơ bằng biến đổi sơ cấp

Lemma 3.1. *Hạng của họ véctơ S bằng hạng của ma trận toạ độ của nó trong bất kì cơ sở nào của không gian V.*

Theo bổ đề 3.1 trên, muốn tìm hạng của họ véctơ S, chỉ cần tìm ma trận toạ độ của nó trong một cơ sở bất kì của V (thông thường ta chọn cơ sở chính tắc). Sau đó áp dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận đã cho về ma trận bậc thang.

4.4 Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi họ véctơ

Định lý 3.11. *Cho V là một không gian véctơ*

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$$

Khi đó $W = \text{span}(S)$ là một không gian véctơ con có số chiều bằng hạng r của S và mọi họ r véctơ độc lập tuyến tính rút từ S là một cơ sở của W.

Nhận xét: Mọi họ r véctơ độc lập tuyến tính rút từ S là một cơ sở của W. Vì vậy trong thực tế, muốn tìm r véctơ độc lập tuyến tính từ W thì **nên** viết toạ độ của họ S theo hàng. Khi đó một cơ sở của W chính là các véctơ có toạ độ là các hàng khác không của ma trận bậc thang thu được sau các phép biến đổi sơ cấp.

4.5 Bài tập

Bài tập 3.10. Tìm cơ sở và số chiều của KGVT sinh bởi hệ véc tơ sau:

a) $v_1 = (2,1,3,4), v_2 = (1,2,0,1), v_3 = (-1,1,-3,0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $v_1 = (2,0,1,3,-1), v_2 = (1,1,0,-1,1), v_3 = (0,-2,1,5,-3), v_4 = (1,-3,2,9,-5)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Lời giải. a) Ta có

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2H_3+H_1]{2H_2-H_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3 - H_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vậy $r(\{v_1, v_2, v_3\}) = 3$ nên số chiều của không gian véctơ sinh bởi hệ véctơ đã cho là 3, và một cơ sở của nó chính là $\{v_1, v_2, v_3\}$ hoặc $\{(2,1,3,4), (0,3,-3,2), (0,0,0,6)\}$.

b) Tương tự

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy số chiều của không gian véctơ sinh bởi hệ véctơ đã cho là 2 và một cơ sở của nó là $\{(2,0,1,3,-1), (0,2,-1,-5,3)\}$. ■

Bài tập 3.11. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ:

$$v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (0,1,-1,1), v_3 = (1,1,1,2), v_4 = (0,0,1,1)$$

. Đặt $V_1 = \text{span}(v_1, v_2), V_2 = \text{span}(v_3, v_4)$. Tìm cơ sở và số chiều của các KGVT $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Lời giải. Chú ý rằng nếu $V_1 = \text{span}(v_1, v_2), V_2 = \text{span}(v_3, v_4)$ thì

$$V_1 + V_2 = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $\dim(V_1 + V_2) = 3$ và một cơ sở của nó là $\{(1,0,1,0), (0,1,-1,1), (0,0,1,1)\}$.
Giả sử $x \in V_1 \cap V_2$ thì $x = x_1v_1 + x_2v_2 = x_3v_3 + x_4v_4$. Từ đẳng thức $x_1v_1 + x_2v_2 = x_3v_3 + x_4v_4$ dẫn chúng ta tới hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

■

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp Gauss ta thấy hệ phương trình trên có vô số nghiệm $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, t, t, -t), t \in \mathbb{R}$. Vậy $x = x_1v_1 + x_2v_2 = t(v_1 + v_2) = t(1,1,0,1)$. Vậy $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ và một cơ sở của nó là $\{(1,1,0,1)\}$.
Chú ý:

$$\boxed{\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$$

Bài tập 3.12. Cho KGVT $P_3[x]$ tìm hạng của hệ véc tơ sau: $v_1 = 1 + x^2 + x^3$, $v_2 = x - x^2 + 2x^3$, $v_3 = 2 + x + 3x^3$, $v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3$.

Lời giải. Nhận xét rằng hạng của hệ véctơ bằng hạng của ma trận toạ độ của nó trong bất kì cơ sở nào của không gian V nên

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy hạng của họ véctơ trên bằng 3 và một cơ sở của không gian véctơ sinh bởi nó là $\{1 + x^2 + x^3, x - x^2 + 2x^3, -x^2 - x^3\}$. ■

Bài tập 3.13. Xét tính chất độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, tìm hạng của các hệ véc tơ sau trong không gian các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$:

a) $1, 2\sin^2 x, 3\cos^2 x$.

b) $1, \sin 2x, \sin 3x$.

c) $1 + x^2, (1+x)^2, (2+x)^2$.

d) $e^x, e^{-x}, 1 + e^x, 2 + e^{-x}$.

Lời giải. a) Hệ véctơ đã cho phụ thuộc tuyến tính vì có một ràng buộc không tầm thường

$$1 - \frac{1}{2}.\left(2\sin^2 x\right) - \frac{1}{3}.\left(3\cos^2 x\right) = 0$$

b) Giả sử có ràng buộc tuyến tính $\lambda_1.1 + \lambda_2.\sin 2x + \lambda_3.\sin 3x = 0$. Chú ý rằng véctơ không của không gian $C(\mathbb{R})$ các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ là hàm số đồng nhất bằng 0 nên:

1. Cho $x = 0$ thì $\lambda_1 = 0$. Vậy ta có $\lambda_2.\sin 2x + \lambda_3.\sin 3x = 0$.
2. Cho $x = \frac{\pi}{6}$ thì $\lambda_2 = 0$. Vậy ta có $\lambda_3.\sin 3x = 0$.
3. Cho $x = \frac{\pi}{2}$ thì $\lambda_3 = 0$.

Vậy hệ véctơ đã cho độc lập tuyến tính.

c) Hệ véctơ đã cho độc lập tuyến tính

d) Hệ véctơ đã cho độc lập tuyến tính ■

Bài tập 3.14. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Định lý 3.12. *Nếu A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $Ax = 0$ bằng n trừ đi hạng của A.*

§5. BÀI TOÁN ĐỔI CƠ SỞ

5.1 Đặt vấn đề

Trong không gian véctơ n chiều V giả sử có hai cơ sở

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ và } \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$$

Kí hiệu $[v]_{\mathcal{B}} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^t$ là toạ độ cột của véctơ $v \in V$ trong cơ sở $\mathcal{B}$. Hãy tìm mối liên hệ giữa $[v]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$

5.2 Ma trận chuyển

Định nghĩa 3.18. *Nếu tồn tại ma trận P thoả mãn*

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'} \text{ với mỗi } v \in V$$

thì ma trận P được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Lemma 3.2. *Với mỗi cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ của V thì ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ tồn tại duy nhất và được xác định theo công thức*

$$P = \left[[e'_1]_{\mathcal{B}} [e'_2]_{\mathcal{B}} \ldots [e'_n]_{\mathcal{B}} \right]$$

Định lý 3.13. *Nếu P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$ thì*

(a) P khả đảo (tức là P không suy biến, $\det P \neq 0$)

(b) P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$

5.3 Bài tập

Bài tập 3.15. Trong $P_3[x]$ cho các véc tơ $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$.

a) Chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là một cơ sở của $P_3[x]$.

b) Tìm toạ độ của véc tơ $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở trên.

c) Tìm toạ độ của véc tơ $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ đối với cơ sở trên.

Bài tập 3.16. Cho KGVT $P_3[x]$ với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ và cở sở khác $B = \{1, a + x, (a + x)^2, (a + x)^3\}$. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang B và ngược lại từ B sang E. Từ đó tìm tọa độ của véc tơ $v = 2 + 2x - x^2 + 3x^3$ đối với cơ sở B.

CHƯƠNG 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

§1. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1 Khái niệm

Định nghĩa 4.19. *Ánh xạ $T : V \to W$ từ không gian véctơ V tới không gian véctơ W được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu*

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$

(ii) $T(ku) = kT(u), \forall k \in \mathbb{R}, u \in V$

Một số tính chất ban đầu của ánh xạ tuyến tính:

Định lý 4.14. *Cho $T : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ V tới không gian véctơ W. Khi đó*

a) $T(0) = 0.$

b) $T(-v) = -T(v), \forall v \in V.$

c) $T(u - v) = T(u) - T(v), \forall u, v \in V.$

1.2 Bài tập

Bài tập 4.1. Cho V là KGVT, $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{f : V \to R, f$ là ánh xạ tuyến tính$\}$. Giả sử V có cơ sở $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Xét tập hợp $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ trong đó $f_i(e_j) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$.
Chứng minh $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là cơ sở của V^*, được gọi là cơ sở đối ngẫu ứng với $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Lời giải. Muốn chứng minh $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là một cơ sở của V^*, ta sẽ chứng minh nó là một hệ sinh của V^* và độc lập tuyến tính.

1. Chứng minh $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là một hệ véctơ độc lập tuyến tính.

   Giả sử có ràng buộc tuyến tính
   $$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0 \tag{1}$$
   Tác động hai vế lên véctơ e_1 ta được
   $$\lambda_1 f_1(e_1) + \lambda_2 f_2(e_1) + \ldots + \lambda_n f_n(e_1) = 0 \tag{2}$$
   Theo định nghĩa thì $f_1(e_1) = 1, f_2(e_1) = 0, \ldots, f_n(e_1) = 0$ nên từ (2) suy ra $\lambda_1 = 0$. Tương tự như vậy, nếu tác động hai vế của (1) lên e_2 ta được $\lambda_2 = 0, \ldots$, tác động hai vế của (1) lên e_n ta được $\lambda_n = 0$. Vậy $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, hệ véctơ đã cho độc lập tuyến tính.

2. Chứng minh $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là hệ sinh của V^*.

   Giả sử $f \in V^*$, khi đó $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ là các số thực xác định. Ta sẽ chứng minh
   $$f = f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \ldots + f(e_n)f_n$$
   Thật vậy, với mỗi $x \in V, x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$ thì
   $$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \ldots + \lambda_n f(e_n)$$
   Mặt khác
   $$\begin{aligned} &[f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \ldots + f(e_n)f_n]\,(x) \\ =&[f(e_1)f_1 + f(e_2)f_2 + \ldots + f(e_n)f_n]\,(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n) \\ =&\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i f(e_j) f_j(e_i) \\ =&\sum_{i=j=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \\ =&f(x) \end{aligned}$$

■

§2. HẠT NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 4.20. *Cho $T : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ V tới không gian véctơ W. Khi đó*

$$\mathrm{Ker}(T) := \{x | x \in V, T(x) = 0\}$$

được gọi là hạt nhân của T.

$$\mathrm{Im}(T) := \{y | y \in W, \exists x \in V, T(x) = y\} = \{T(x) | x \in V\}$$

được gọi là ảnh của T.

2.1 Các tính chất của hạt nhân và ảnh

Định lý 4.15. *Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

(i) $\mathrm{Ker}(T)$ *là một không gian véctơ con của V.*

(ii) $\mathrm{Im}(T)$ *là một không gian véctơ con của W.*

2.2 Hạng của ánh xạ tuyến tính - Định lý về số chiều

Định nghĩa 4.21. *Nếu $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì số chiều của không gian* $\mathrm{Im}(T)$ *được gọi là hạng của T, kí hiệu là* $\mathrm{rank}(T)$*:*

$$\mathrm{rank}(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$$

Định lý 4.16 (Định lý về số chiều). *Nếu $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ n chiều V tới không gian W thì*

$$n = \dim V = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T)$$

hay

$$n = \dim V = \dim \mathrm{rank}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T)$$

2.3 Bài tập

Bài tập 4.2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_3)$.

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

c) Tìm một cơ sở của Ker$f$.

Lời giải. a) Dễ kiểm tra.

c) Theo định nghĩa Ker$f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | f(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ nên Ker$f$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Hệ phương trình trên có vô số nghiệm với $\begin{cases} x_1 \text{ bất kì} \\ x_3 = -2x_1 \\ x_2 = -5x_1 \end{cases}$. Vậy dimKer$f = 1$ và một cơ sở của nó là $(1, -5, -2)$. ■

Bài tập 4.3. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng

a) f là đơn ánh khi và chỉ khi Ker$f = \{0\}$.

b) f là toàn ánh khi và chỉ khi Im $f = W$.

Lời giải.

$\boxed{\Rightarrow}$ Giả thiết f là đơn ánh. Nếu $x \in$ Ker$f$ thì $f(x) = 0 = f(0)$. Do f đơn ánh nên $x = 0$ hay Ker$f = \{0\}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Giả sử có $f(x_1) = f(x_2)$, khi đó $f(x_1 - x_2) = 0$ nên $x_1 - x_2 \in$ Ker$f$ hay $x_1 - x_2 = 0$. Vậy $x_1 = x_2$ và theo định nghĩa f là đơn ánh.

b) Một hệ quả trực tiếp của khái niệm toàn ánh. ■

Bài tập 4.4. Cho V, V' là 2 KGVT n chiều và $f : V \to V'$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:

a) f là đơn ánh.

b) f là toàn ánh.

c) f là song ánh.

Lời giải. Thực chất chỉ cần chứng minh $a) \Rightarrow b)$ và $b) \Rightarrow a)$.

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Theo định lý về số chiều 4.16

$$n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f \tag{1}$$

Do f là đơn ánh nên theo bài tập 4.3 ta có $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, hay $\dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n$. Mặt khác $\operatorname{Im} f$ là một không gian véctơ con của V' và $\dim V' = n$ nên $\operatorname{Im} f = V'$ hay f là toàn ánh.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Ngược lại, nếu f là toàn ánh thì $\operatorname{Im} f = V' \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n$. Từ (1) ta suy ra $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ hay $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, tức f là đơn ánh. ∎

§3. MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

3.1 Khái niệm

Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ n chiều V tới không gian véctơ m chiều W. Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V và $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của W với

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

Hãy tìm mối liên hệ giữa $[T(x)]_{\mathcal{B}'}$ (toạ độ cột của véctơ $T(x)$ trong cơ sở $\mathcal{B}'$) với $[x]_{\mathcal{B}}$ (toạ độ của véctơ x trong cơ sở $\mathcal{B}$).

Định nghĩa 4.22. *Ma trận A cỡ $m \times n$ thoả mãn tính chất*

$$[T(x)]_{\mathcal{B}'} = A.[x]_{\mathcal{B}}, \forall x \in V$$

nếu tồn tại, được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ trong V và $\mathcal{B}'$ trong W.

Định lý 4.17. *Đối với mỗi cặp cơ sở $\mathcal{B}$ của V và $\mathcal{B}'$ của W, ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ tồn tại duy nhất và được xác định theo công thức:*

$$A = [[T(u_1)]_{\mathcal{B}'}, [T(u_2)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [T(u_n)]_{\mathcal{B}'},]$$

Ý nghĩa của ma trận của ánh xạ tuyến tính:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\text{Tính trực tiếp}"] \arrow[d, "(1)"'] & T(x) \\
{[x]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{Nhân } A[x]_{\mathcal{B}}", "\text{Tính gián tiếp (2)}"'] & {[T(x)]_{\mathcal{B}'}} \arrow[u, "(3)"']
\end{tikzcd}$$

Theo sơ đồ này, khi đã biết $x \in V$, muốn tính $T(x)$ có hai cách: cách thứ nhất là tính trực tiếp, cách thứ hai là tính gián tiếp qua 3 bước:

1. Tìm ma trận toạ độ $[x]_{\mathcal{B}}$.

2. Tính $[T(x)]_{\mathcal{B}'} = [T(x)]_{\mathcal{B}'}$.

3. Từ $[T(x)]_{\mathcal{B}'}$ ta suy ra $T(x)$.

Có hai lý do để thấy tầm quan trọng của cách tính gián tiếp. Thứ nhất là nó cung cấp một phương tiện để tính toán các ánh xạ tuyến tính trên máy tính điện tử. Thứ hai là chúng ta có thể chọn các cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ sao cho ma trận A càng đơn giản càng tốt. Khi đó có thể cung cấp những thông tin quan trọng về ánh xạ tuyến tính.

3.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính thông qua phép đổi cơ sở

Định nghĩa 4.23 (Ma trận đồng dạng). *Giả sử A và B là hai ma trận vuông cùng cấp n. Ta nói B đồng dạng với A, kí hiệu $B \sim A$ nếu tồn tại một ma trận không suy biến P sao cho*

$$B = P^{-1}AP$$

Định lý 4.18. *Giả sử $T : V \to V$ là một toán tử tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều V. Nếu A là ma trận của T trong cơ sở $\mathcal{B}$ và A' là ma trận của T đối với cơ sở $\mathcal{B}'$ thì*

$$A' = P^{-1}BP$$

trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

3.3 Bài tập

Bài tập 4.5. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1 + x_2 + x_3)$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

Bài tập 4.6. Cho ánh xạ đạo hàm $D : P_n[x] \to P_n[x]$ xác định bởi

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

a) Chứng minh D là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của D đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$.

c) Xác định Ker$f$ và Im f

Bài tập 4.7. Cho ánh xạ $f : P_2[x] \to P_4[x]$ xác định như sau: $f(p) = p + x^2p, \forall p \in P_2$.

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $E_1 = \{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1' = \{1 + x, 2x, 1 + x^2\}$ của $P_2[x]$ $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

Bài tập 4.8. Xét $\mathbb{R}^2$ giống như tập các véctơ thông thường trong mặt phẳng có gốc ở gốc tọa độ. Cho f là phép quay một góc α.Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Bài tập 4.9. Cho ánh xạ $f: M_2 \to M_2$ xác định như sau:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix}.$$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của M_2 :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 4.10. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong đó: $v_1 = 3x + 3x^2, v_2 = -1 + 3x + 2x^2, v_3 = 3 + 7x + 2x^2$.

a) Tìm $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$.

b) Tìm $f(1 + x^2)$.

Bài tập 4.11. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3).$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$.

Bài tập 4.12. Cho A là ma trận vuông cấp n. Ta xác định ánh xạ $f_A: M_n \to M_n$ như sau $f_A(X) = AX$.

a) Chứng minh f_A là biến đổi tuyến tính.

b) Giả sử $\det A \neq 0$. Chứng minh f_A là đẳng cấu tuyến tính.

c) Cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Tìm ma trận của f_A đối với cơ sở chính tắc của M_2 là

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 4.13. Cho A là ma trận kích thước $m \times n$, B là ma trận kích thước $n \times p$. Chứng minh $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$, với $\operatorname{rank}(A)$ = hạng của ma trận A.

§4. TRỊ RIÊNG VÀ VÉCTƠ RIÊNG

4.1 Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Định nghĩa 4.24. *Giả sử* A *là một ma trận vuông cấp* n. *Số thực* λ *gọi là trị riêng của* A *nếu phương trình*

$$Ax = \lambda x, x \in \mathbb{R}^n$$

có nghiệm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Để tìm trị riêng của ma trận vuông A cấp n, ta viết $Ax = \lambda x$ dưới dạng phương trình

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{4.2}$$

Đây là một hệ phương trình thuần nhất, muốn cho λ là trị riêng của A, điều kiện cần và đủ là hệ trên có không tầm thường, tức

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{4.3}$$

Định nghĩa 4.25. *Phương trình 4.3 được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận vuông* A, *còn đa thức* $\det(A - \lambda I)$ *được gọi là đa thức đặc trưng của* A..

Như vậy muốn tìm trị riêng của ma trận A ta chỉ cần lập phương trình đặc trưng và giải phương trình phương trình đặc trưng đã cho. Còn các véctơ riêng ứng với trị riêng λ chính là các véctơ khác không trong không gian nghiệm của hệ phương trình 4.2. Không gian nghiệm của hệ phương trình 4.2 được gọi là không gian riêng ứng với trị riêng λ.

4.2 Trị riêng và véctơ riêng của toán tử tuyến tính

Định nghĩa 4.26. *Giả sử* V *là một không gian véctơ. Số* λ *gọi là trị riêng của của toán tử tuyến tính* $T : V \to V$ *nếu tồn tại véctơ* $x \neq 0$ *sao cho* $T(x) = \lambda x$.

Định lý 4.19. *Giả sử* T *là một toán tử tuyến tính trong không gian véctơ hữu hạn chiều* V *và* A *là ma trận của* T *đối với một cơ sở nào đó* $\mathcal{B}$ *của* V. *Thế thì*

1. *Những trị riêng của* T *là những trị riêng của* A.
2. *Véctơ* x *là véctơ riêng của* T *ứng với trị riêng* λ *khi và chỉ khi véctơ cột* $[x]_{\mathcal{B}}$ *là véctơ riêng của* A *ứng với trị riêng* λ.

4.3 Chéo hoá ma trận

Đặt bài toán:

Bài toán 1: Cho V là một không gian véctơ hữu hạn chiều, $T : V \to V$ là một toán tử tuyến tính. Ta đã biết rằng ma trận của T phụ thuộc vào cơ sở đã chọn trong V. Hỏi có tồn tại một cơ sở trong V trong V sao cho ma trận của T đối với cơ sở đó là ma trận chéo.

Bài toán 2: (Dạng ma trận). Cho A là một ma trận vuông. Hỏi có tồn tại hay không một ma trận P khả đảo sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo.

Định nghĩa 4.27 (Ma trận chéo hoá được). *Cho ma trận vuông A. Nếu tồn tại ma trận khả đảo P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo thì ta nói ma trận A chéo hoá được và ma trận P làm chéo hoá ma trận A.*

Định lý 4.20. *Giả sử A là một ma trận vuông cấp n. Điều kiện cần và đủ để A chéo hoá được là nó có n véctơ riêng độc lập tuyến tính.*

Corollary 4.2. *Nếu ma trận A vuông cấp n có n trị riêng khác nhau thì A chéo hoá được.*

Quy trình chéo hoá một ma trận

1. Tìm n véctơ riêng độc lập của A:
$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$
2. Lập ma trận P có $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các cột.
3. Khi đó ma trận P sẽ làm chéo hoá ma trận A, hơn nữa
$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$$
trong đó $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ là các trị riêng ứng với véctơ riêng p_i.

4.4 Bài tập

Bài tập 4.14. Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$ f)$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.15. Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ xác định như sau:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$$

a) Tìm giá trị riêng của f.

b) Tìm các véctơ riêng ứng với các giá trị riêng tìm được.

Bài tập 4.16. Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$ khi đó với:

a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Bài tập 4.17. Ma trận A có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có , tìm ma trận chéo đó:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài tập 4.18. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau: $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2 + 2x_3)$. Hãy tìm cơ sở để f có dạng chéo.

Bài tập 4.19. Tìm cở sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có dạng chéo trong đó $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$

Bài tập 4.20. Cho $f: V \to V$ là biến đổi tuyến tính. Giả sử $f^2 = f \circ f: V \to V$ có giá trị riêng λ^2. Chứng minh một trong 2 giá trị λ hoặc $-\lambda$ là giá trị riêng của f.

Bài tập 4.21. Cho $D: P_n[x] \to P_n[x]$ là ánh xạ đạo hàm, còn $g: P_n[x] \to P_n[x]$ xác định bởi $g(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = (2x+3)(a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1})$. Tìm các giá trị riêng của D và g.

CHƯƠNG 5

DẠNG TOÀN PHƯƠNG, KHÔNG GIAN EUCLIDE

§1. KHÁI NIỆM

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 5.28. *Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ được gọi là một* dạng song tuyến tính *trên V nếu nó tuyến tính với mỗi biến khi cố định biến còn lại, tức là:*

$$\begin{cases} \varphi\left(hx_1 + kx_2, y\right) = h\varphi\left(x_1, y\right) + k\varphi\left(x_2, y\right) \forall x_1, x_2, y \in V, \forall h, k \in \mathbb{R} \\ \varphi\left(x, hy_1 + ky_2\right) = h\varphi\left(x, y_1\right) + k\varphi\left(x, y_2\right) \forall x, y_2, y_2 \in V, \forall h, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dạng song tuyến tính φ được gọi là đối xứng nếu

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \text{ với mọi } x, y \in V$$

(bằng cách tương tự chúng ta có thể định nghĩa được một dạng đa tuyến tính *trên V).*

Định nghĩa 5.29. *Giả sử φ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V. Khi đó ánh xạ $H : V \to \mathbb{R}$ xác định bởi*

$$H(x) = \varphi(x, x)$$

được gọi là một dạng toàn phương trên V ứng với dạng song tuyến tính đối xứng φ.

1.2 Phân loại dạng toàn phương

Ta nói dạng toàn phương $\varphi(x, x)$ là

1. Xác định dương nếu $\varphi(x,x) > 0$ với mọi $x \in V, x \neq 0$.

2. Nửa xác định dương (hay xác định không âm) nếu $\varphi(x,x) \geq 0$ với mọi $x \in V, x \neq 0$.

3. Xác định âm nếu $\varphi(x,x) < 0$ với mọi $x \in V, x \neq 0$.

4. Nửa xác định âm (hay xác định không dương) nếu $\varphi(x,x) \leq 0$ với mọi $x \in V, x \neq 0$.

5. Không xác định dấu nếu tồn tại $x, y \in V$ sao cho $\varphi(x,x) < 0, \varphi(y,y) > 0$.

1.3 Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương trên không gian hữu hạn chiều.

Cho $\varphi : V_n \times V_n \to R$ là một dạng song tuyến tính, trong đó V_n là một KGVT có số chiều là $n.S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V_n . Khi đó ta có:

$$\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = [x]_S^t A [y]_S = [y]_S^t A [x]_S$$

Như vậy φ hoàn toàn xác định bởi bộ các giá trị $\left(\varphi(e_i, e_j)\right)_{i,j=1}^{n}$. Xét ma trận $A = \left[a_{ij}\right] = \left[\varphi\left(e_i, e_j\right)\right]$. Dạng song tuyến tính φ đối xứng khi và chỉ khi A là một ma trận đối xứng.

Định nghĩa 5.30. *Ma trận $A = \left[a_{ij}\right] = \left[\varphi\left(e_i, e_j\right)\right]$ được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính φ (hay ma trận của dạng toàn phương H) trong cơ sở S, biểu thức $\varphi(x,y) = [x]_S^t A [y]_S = [y]_S^t A [x]_S$ được gọi là dạng ma trận của dạng song tuyến tính φ trong cơ sở S.Tương tự như vậy $H(x,x) = [x]_S^t A [x]_S$ được gọi là dạng ma trận của dạng toàn phương H trong cơ sở S.*

1.4 Bài tập

Bài tập 5.1. Cho f là dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ 3 chiều V có ma trận đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Cho $h : V \to V$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. Chứng minh ánh xạ $g(x,y) = f(x, h(y))$ là dạng song tuyến tính trên V. Tìm ma trận của nó đối với cơ sở $\mathcal{B}$.

Lời giải. Để chứng minh g là dạng song tuyến tính ta cần chứng mình:

$$\begin{cases} g\left(hx_1 + kx_2, y\right) = hg\left(x_1, y\right) + kg\left(x_2, y\right) \\ g\left(x, hy_1 + ky_2\right) = hg\left(x, y_1\right) + kg\left(x, y_2\right) \end{cases}$$

, dễ kiểm tra. Do f là dạng song tuyến tính trên V nên ta có $f\left(x, h\left(y\right)\right) = [x]_{\mathcal{B}}^t A\left[h\left(y\right)\right]_{\mathcal{B}}$ với mọi $x, y \in V$. Hơn nữa $h : V \to V$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là B nên ta có $\left[h\left(y\right)\right]_{\mathcal{B}} = B.\left[y\right]_{\mathcal{B}}$. Tóm lại ta có:

$$g(x, y) = f\left(x, h(y)\right) = [x]_{\mathcal{B}}^t A\left[h\left(y\right)\right]_{\mathcal{B}} = [x]_{\mathcal{B}}^t A.B.\left[y\right]_{\mathcal{B}}$$

với mọi $x, y \in V$ nên ma trận của nó đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là ma trận AB. ■

§2. RÚT GỌN MỘT DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Định nghĩa 5.31 (Dạng chính tắc của dạng toàn phương trên KG n chiều). *Biểu thức của dạng toàn phương trong cơ sở S chỉ chứa các số hạng bình phương*

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$$

được gọi là dạng chính tắc của nó trong cơ sở S. Ma trận của dạng chính tắc này là ma trận chéo $A = \mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

2.1 Phương pháp Lagrange

Xét dạng toàn phương $Q(x,x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, a_{ij} = a_{ji}$. Giả sử $a_{11} \neq 0$, ta nhóm các số hạng có chứa x_1:

$$\begin{aligned} Q &= \left(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n\right) + ... + a_{nn}x_n^2 \\ &= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n\right)^2 + Q_1, \end{aligned}$$

trong đó Q_1 không chứa x_1 nữa. Đặt $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, y_i = x_i, i = 2,3,...,n$, thì $Q = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + Q_1$, trong đó Q_1 không chứa y_1. Tiếp tục thực hiện quá trình trên với Q_1 chỉ còn chứa các biến $y_2, y_3, ..., y_n$ như với Q trước. Cứ thế, cho đến khi thu được biểu thức không chứa số hạng chéo nữa.
Nếu $_{11} = 0$, ta tìm trong các số hạng $a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ xem có số nào khác 0, chẳng hạn nếu $a_{kk} \neq 0$ thì ta đổi vai trò của a_{kk} cho a_{11}.
Nếu tất cả các $a_{ii} = 0$ thì tồn tại ít nhất một số hạng $2a_{ij}x_ix_j$ với $a_{ij} \neq 0$. Lúc đó ta đặt:

$$x_i = y_i + y_j, x_j = y_i - y_j, x_k = y_k, k \neq i,j$$

thì $2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}\left(y_i^2 - y_j^2\right)$ nghĩa là trong biểu thức của dạng toàn phương đã xuất hiện số hạng bình phương, tiếp tục làm lại từ đầu.

2.2 Phương pháp Jacobi

Định lý 5.21 (Jacobi). *Dạng toàn phương $\varphi(x,x)$ có ma trận trong cơ sở nào đó của không gian n chiều V là ma trận đối xứng A. φ xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của A đều dương.*

2.3 Phương pháp chéo hoá trực giao

Phương pháp chéo hoá trực giao sẽ được học ở bài sau, sau khi đã nghiên cứu không gian Euclide. Tuy vậy, một hệ quả của nó sẽ được nêu ra ngay sau đây để giúp sinh viên có thêm một tiêu chuẩn để kiểm tra dấu của một dạng toàn phương (tất nhiên là không cần đến kiến thức về không gian Euclide).

Định lý 5.22. *Dạng toàn phương $\varphi(x,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là ma trận đối xứng A. Khi đó φ xác định dương khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng của A đều dương*

2.4 Bài tập

Bài tập 5.2. Trên $\mathbb{R}^3$ cho các dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ: $\omega_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$ $\omega_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$ $\omega_3 = 5x^2+2y^2+z^2-6xy+2xz-2yz$

a) Bằng phương pháp Lagrange, đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

b) Xét xem các dạng toàn phương xác định dương , âm không?

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\omega_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3\\
&= x_1^2+2x_1\left(x_2-2x_3\right)+\left(x_2-2x_3\right)^2+4x_2^2+4x_2x_3-8x_3^2\\
&= \left(x_1+x_2-2x_3\right)^2+\left(2x_2+x_3\right)^2-9x_3^2\\
&= y_1^2+y_2^2-9y_3^2
\end{aligned}$$

Suy ra ω_1 không xác định dấu.

Đối với ω_2, đặt $\begin{cases} x_1 = y_1-y_2\\ x_2 = y_1+y_2\\ x_3 = y_3\end{cases}$ ta được:

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= y_1^2-y_2^2+5y_1y_3-3y_2y_3\\
&= \left(y_1+\frac{5}{2}y_3\right)^2-\left(y_2+\frac{3}{2}y_3\right)^2-4y_3^2\\
&= Z_1^2-Z_2^2-4Z_3^2
\end{aligned}$$

Suy ra ω_2 không xác định dấu.

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 5x^2+2y^2+z^2-6xy+2xz-2yz\\ &= 5\left[x^2+2x\left(-\frac{3}{5}y+\frac{6}{15}z\right)+\left(-\frac{3}{5}y+\frac{6}{15}z\right)^2\right]+\frac{1}{5}\left(y^2+2yz+z^2\right)\\ &= 5\left(x-\frac{3}{5}y+\frac{6}{15}z\right)^2+\frac{1}{5}\left(y+z\right)^2\end{aligned}$$

hoặc

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 5x^2+2y^2+z^2-6xy+2xz-2yz\\ &= z^2+2z\left(x-y\right)+\left(x-y\right)^2+4x^2-4xy+y^2\\ &= \left(z+x-y\right)^2+\left(2x-y\right)^2\end{aligned}$$

Suy ra ω_3 nửa xác định dương. ■

Bài tập 5.3. Xác định a để các dạng toàn phương xác định dương:

a) $5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

b) $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$.

c) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

Lời giải. **Cách 1:** Sử dụng phương pháp Lagrange

$$\begin{aligned}\omega &= 5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3\\ &= 5\left[x_1^2+2.\frac{1}{5}x_1\left(2x_2-x_3\right)+\frac{1}{25}\left(2x_2-x_3\right)^2\right]+\frac{1}{5}x_2^2-\frac{6}{5}x_2x_3+\left(a-\frac{1}{5}\right)x_3^2\\ &= 5\left(x_1+\frac{1}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3\right)^2+\frac{1}{5}\left(x_2^2-2x_2.3x_3+9x_3^2\right)+\left(a-2\right)x_3^2\\ &= 5\left(x_1+\frac{1}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3\right)^2+\frac{1}{5}\left(x_2-3x_3\right)^2+\left(a-2\right)x_3^2\end{aligned}$$

Vậy ω xác định dương khi và chỉ khi $a>2$.

Cách 2: Sử dụng định lý Jacobi 5.21

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & a\end{bmatrix}$$

nên

$$\Delta_1=|5|=5, \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1, \Delta_3=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & a\end{vmatrix}=a-2$$

Vậy ω xác định dương khi và chỉ khi $a>2$.

Cách 3: Sử dụng định lý 5.22 ■

2.5 Kết luận

1. Phương pháp Lagrange để rút gọn một dạng toàn phương là phương pháp khá đơn giản về mặt kĩ thuật biến đổi.

2. Phương pháp Jacobi chỉ áp dụng được trong trường hợp ma trận A của dạng toàn phương có tất cả các định thức con chính đều khác 0. Tuy nhiên trong các bài toán biện luận, tìm các tham số đề một dạng toàn phương xác định dương thì phương pháp Jacobi lại khá hiệu quả (bài tập 5.3).

3. Có nhiều cách khác nhau để đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc, điều đó có nghĩa một dạng toàn phương có thể có nhiều dạng chính tắc khác nhau (trong những cơ sở khác nhau). Tuy nhiên chúng ta có định luật quán tính sau: *"Khi một dạng toàn phương được đưa về dạng chính tắc bằng hai cách khác nhau (tức là trong những cơ sở mới khác nhau) thì số các hệ số dương và số các hệ số âm bằng nhau, và chúng lần lượt được gọi là chỉ số quán tính dương và chỉ số quán tính âm của dạng toàn phương đã cho"*.

§3. KHÔNG GIAN EUCLIDE

3.1 Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng

Định nghĩa 5.32. *Cho V là một không gian vectơ, một tích vô hướng trên V là một ánh xạ $<.,.>: V \times V \to R$ thoả mãn các tiên đề sau:*

TVH1: $< u, v >$ *xác định với mọi* $u, v \in V$

TVH2: $< u, v > = < v, u >$

TVH3: $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$

TVH4: $< ku, v > = k < u, v >$

TVH5: $< u, u > \geq 0, < u, u > = 0$ *khi và chỉ khi* $u = 0$.

Nhận xét: Tích vô hướng là một dạng song tuyến tính, đối xứng, và dạng toàn phương sinh bởi nó xác định dương.

Định nghĩa 5.33 (Độ dài của vectơ). *Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó* độ dài *(hay* chuẩn*) của vectơ $\alpha \in V$ là số thực không âm $\|\alpha\| = \sqrt{< \alpha, \alpha >}$.*

Định nghĩa 5.34 (Khoảng cách). *Cho V là một không gian có tích vô hướng. Khi đó khoảng cách giữa hai vectơ u và v là số thực không âm $d(u, v) = \|u - v\|$.*

Định nghĩa 5.35 (Sự vuông góc). *Hai vectơ u và v được gọi là* vuông góc *hay* trực giao *với nhau và được kí hiệu là $u \perp v$ nếu*

$$< u, v > = 0$$

Định nghĩa 5.36 (Họ vectơ trực giao, trực chuẩn).

a) *Hệ vectơ $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ của không gian vectơ Euclide E được gọi là một hệ* trực giao *nếu các vectơ của hệ đôi một vuông góc với nhau, tức là*

$$< e_i, e_j > = 0 \text{ nếu } i \neq j$$

b) *Hệ vectơ $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ của không gian vectơ Euclide E được gọi là một hệ* trực chuẩn *nếu nó là một hệ trực giao và mỗi vectơ của hệ đều có độ dài bằng 1, tức là*

$$< e_i, e_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i \neq j \\ 1 \text{ nếu } i = j \end{cases}$$

Mệnh đề 1.

(i) *Mỗi hệ trực giao không chứa vectơ* 0 *đều độc lập tuyến tính.*

(ii) *Nếu hệ vectơ* $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ *là trực giao và không chứa vectơ* 0 *thì hệ vectơ* $\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \ldots, \frac{e_k}{\|e_k\|}\right)$ *là một hệ trực chuẩn.*

3.2 Phép trực giao hoá Schmidt

Định lý 5.23. *Cho* V *là một không gian vectơ có tích vô hướng,* $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *là một họ vectơ độc lập tuyến tính của* V*. Ta có thể thay* S *bởi họ trực chuẩn* $S' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *, sao cho* $\operatorname{span}\{u_1, u_2, ..., u_k\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *với mọi* $k = 1, 2, ..., n$*.*

Bước 1: Đặt $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

Bước 2: Đặt $\overline{v_2} = u_2 + tv_1$ sao cho $<\overline{v_2}, v_1>= 0$ tức là $t = -<u_2, v_1>$. Sau đó chọn $v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$ Giả sử sau $k-1$ bước ta đã xây dựng được họ trực chuẩn $S'_{k-1} = \{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$ sao cho $\operatorname{span}\{u_1, u_2, ..., u_{k-1}\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$. Ta thực hiện đến bước thứ k sau:

Bước k: Đặt $\overline{v_k} = u_k + t_1 v_1 + ... + t_{k-1} v_{k-1}$ sao cho $<\overline{v_k}, v_j>= 0, j = 1, 2, ..., k-1$ Tức là ta có $t_j = -<u_k, v_j>, j = 1, 2, ..., k-1$. Sau đó chọn $v_k = \frac{\overline{v_k}}{\|\overline{v_k}\|}$. Tiếp tục thực hiện đến khi $k = n$ ta thu được hệ trực chuẩn $S' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Nhận xét: Về mặt lý thuyết, chúng ta vừa chuẩn hoá, vừa trực giao các vectơ như ở trên, tuy nhiên trong thực hành nếu gặp phải các phép toán phức tạp khi sau mỗi bước phải chuẩn hoá véctơ $v_k = \frac{\overline{v_k}}{\|\overline{v_k}\|}$, người ta thường chia làm hai phần: trực giao hệ vectơ S trước rồi chuẩn hoá các vectơ sau.

Bước 1: Đặt $v_1 = u_1$

Bước 2: Đặt $v_2 = u_2 + tv_1$ sao cho $<v_2, v_1>= 0$, tức là $t = \frac{-<u_2, v_1>}{<v_1, v_1>}$.
Giả sử sau $k-1$ bước ta đã xây dựng được họ trực giao $S'_{k-1} = \{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$ sao cho $\operatorname{span}\{u_1, u_2, ..., u_{k-1}\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$. Ta thực hiện đến bước thứ k sau:

Bước k: Đặt $v_k = u_k + t_1 v_1 + ... + t_{k-1} v_{k-1}$ sao cho $<v_k, v_j>= 0, j = 1, 2, ..., k-1$ Tức là ta có $t_j = \frac{-<u_k, v_j>}{<v_j, v_j>}, j = 1, 2, ..., k-1$. Tiếp tục thực hiện đến khi $k = n$ ta thu được hệ trực giao $S' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Bước n+1: Chuẩn hoá các vectơ trong hệ trực giao $S' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ta thu được hệ trực chuẩn cần tìm.

3.3 Hình chiếu của một vectơ lên một không gian vectơ con

Định nghĩa 5.37. *Giả sử U, V là các không gian vectơ con của không gian Euclide E.*

(a) *Ta nói vectơ $\alpha \in E$* vuông góc *(hay* trực giao *) với U và viết $\alpha \perp U$, nếu $\alpha \perp u$ với mọi $u \in U$.*

(b) *Ta nói U* vuông góc *(hay* trực giao *) với V và viết $U \perp V$, nếu $u \perp v$ với mọi $u \in U, v \in V$.*

Định nghĩa 5.38. *Giả sử U là một không gian vectơ con của không gian Euclide E. Khi đó*

$$U^{\perp} = \{\alpha \in E | \alpha \perp U\}$$

được gọi là phần bù trực giao *của U trong E.*

Dễ thấy rằng $U^{\perp}$ cũng là một không gian vectơ con của E.

Định lý 5.24. *Giả sử U là một không gian vectơ con của không gian Euclide E. Khi đó với mỗi vectơ $x \in E$ đều thừa nhận sự phân tích duy nhất*

$$x = u + u^{\perp}$$

trong đó $u \in U$ và $u^{\perp} \in U^{\perp}$.

Định nghĩa 5.39. *Với các giả thiết như trong định lý 5.24 trên, u được gọi là hình chiếu của x lên không gian vectơ U và $u^{\perp}$ được gọi là thành phần của x trực giao với U.*

Định lý 5.25. *Giả sử U là một không gian vectơ con của không gian Euclide E và U có một cơ sở trực chuẩn là $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Khi đó hình chiếu của vectơ $x \in E$ bất kì được xác định theo công thức*

$$u = < x, v_1 > .v_1 + < x, v_2 > .v_2 + \dots < x, v_n > .v_n$$

3.4 Bài tập

Bài tập 5.4. Cho V là không gian Euclide. Chứng minh:

a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

b) $u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2, \forall u, v \in V$.

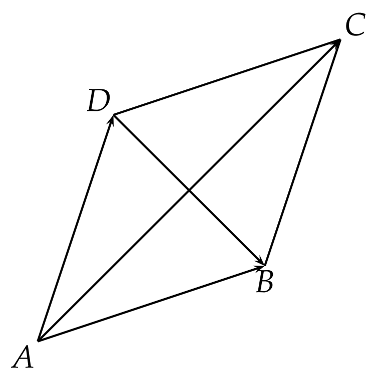
Lời giải. a) Ta có

$$\begin{cases} \|u+v\|^2 = < u+v, u+v >= \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \\ \|u-v\|^2 = < u-v, u-v >= \|u\|^2 - 2 < u, v > + \|v\|^2 \end{cases}$$

nên

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

Ý nghĩa hình học: Đẳng thức hình bình hành

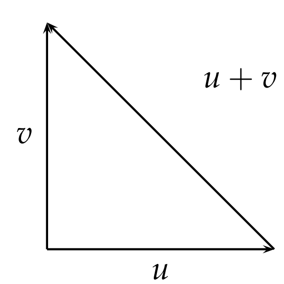


$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{DB}\right|^2 = 2\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2\right)$$

b)

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 &\Leftrightarrow \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \\ = \|u\|^2 + \|v\|^2 &\Leftrightarrow < u, v >= 0 \Leftrightarrow u \perp v \end{aligned}$$

Ý nghĩa hình học: Định lý Pitago.



■

Bài tập 5.5. Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Với u, v là các véc tơ của V ta có $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n, v = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$. Đặt $< u, v >= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

a) Chứng minh $< u, v >$ là một tích vô hướng trên V.

b) Áp dụng cho trường hợp $V = \mathbb{R}^3$, với $e_1 = (1,0,1), e_2 = (1,1,-1), e_3 = (0,1,1), u = (2,-1,-2), v = (2,0,5)$. Tính $< u, v >$.

c) Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, u = 2 + 3x^2, v = 6 - 3x - 3x^2$. Tính $< u, v >$.

d) Áp dụng cho trường hợp $V = P_2[x]$, với $\mathcal{B} = \{1 + x, 2x, x - x^2\}, u = 2 + 3x^2, v = 6 - 3x - 3x^2$. Tính $< u, v >$.

Bài tập 5.6. Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra các dạng $< p, q >$ sau có phải là tích vô hướng hay không?

a) $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

b) $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$

c) $< p, q >= \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ Trong trường hợp là tích vô hướng tính $< p, q >$ với $p = 2 - 3x + 5x^2 - x^3, q = 4 + x - 3x^2 + 2x^3$

Lời giải. a) Dễ dàng kiểm tra các tiên đề TVH 1,2,3,4. Riêng đối với tiên đề TVH 5, tồn tại vectơ $p = x(x-1)(x-2) \neq 0$ mà:

$$< p, p >= p^2(0) + p^2(1) + p^2(2) = 0$$

Do đó biểu thức đã cho không phải là một tích vô hướng.

b) $< p, q >$ đã cho là một tích vô hướng, dễ dàng kiểm tra các tiên đề TVH1,2,3,4. Riêng tiên đề TVH5, ta có:

$$< p, p >= p^2(0) + p^2(1) + p^2(2) + p^2(3) \geq 0$$

và

$$< p, p >= 0 \Leftrightarrow p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0.$$

Giả sử $p = a + bx + cx^2 + dx^3$, giải hệ phương trình từ các điều kiện $p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0$, ta được $a = b = c = d = 0$, nghĩa là $p = 0$.

c) Biểu thức đã cho là một TVH ■

Bài tập 5.7. Dùng phương pháp trực chuẩn hóa Gram - Smidt xây dựng hệ trực chuẩn từ hệ véctơ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (0,1,1,1), u_3 = (0,0,1,1), u_4 = (0,0,0,1)$ trong $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc

Bài tập 5.8. Trong $P_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ với $p, q \in P_2[x]$.

a) Trực chuẩn hoá Gram – Smit cơ sở $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ để nhận được cơ sở trực chuẩn $\mathcal{A}$.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{A}$

c) Tìm $[r]_{\mathcal{A}}$ biết $r = 2 - 3x + 3x^2$

Lời giải. Đặt $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2$

Bước 1: Đặt $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, trong đó $\|u_1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$, nên $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bước 2: Đặt $\overline{v_2} = u_2 + tv_1$, trong đó $t = - < u_2, v_1 >= -\int_{-1}^{1} x.\frac{1}{\sqrt{2}}d\mathrm{x} = 0$, vậy $\overline{v_2} = u_2 = x$.

Chọn $v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$, trong đó $\|\overline{v_2}\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$, vậy $v_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$.

Bước 3: Đặt $\overline{v_3} = u_3 + t_1v_1 + t_2v_2$, trong đó $\begin{cases} t_1 = - < u_3, v_1 >= -\int_{-1}^{1} x^2.\frac{1}{\sqrt{2}}d\mathrm{x} = -\frac{2}{3\sqrt{2}} \\ t_2 = - < u_3, v_2 >= -\int_{-1}^{1} x^2.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}xd\mathrm{x} = 0 \end{cases}$

Vậy $\overline{v_3} = x^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$. Chọn $v_3 = \frac{\overline{v_3}}{\|\overline{v_3}\|}$ trong đó $\|\overline{v_3}\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}$, vậy $v_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$. Tóm lại ta nhận được cơ sở trực chuẩn

$$A = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$$

■

Bài tập 5.9. Cho không gian Euclide V hữu hạn chiều, W là không gian con của V và u là một véctơ của V. Chứng minh:

a) Tồn tại véc tơ u' của W sao cho $(u - u') \perp W$

b) Khi đó $\|u - u'\| \leq \|u - w\|, \forall w \in W$

Lời giải. a) **Cách 1:** Do W là không gian con của V hữu hạn chiều nên W có một cơ sở trực chuẩn là $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Khi đó với mọi $u \in V$, ta đặt $u' =< u, v_1 > v_1 + < u, v_2 > v_2 + ... + < u, v_m > v_m$. Ta sẽ chứng minh $(u - u') \perp$W. Thật vậy, vì hệ $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ trực chuẩn nên:

$$\begin{aligned} < u - u', v_i > &=< u, v_i > - < u', v_i > \\ &=< u, v_i > - \langle < u, v_1 > v_1 + < u, v_2 > v_2 + ... + < u, v_m > v_m, v_i \rangle \\ &=< u, v_i > - < u, v_i > \\ &= 0 \end{aligned}$$

Suy ra $(u - u') \perp v_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$ nên $(u - u') \perp W$

Cách 2: Do W là không gian con của V hữu hạn chiều nên W có một cơ sở là $S' = \{v'_1, v'_2, ..., v'_m\}$, và chúng ta có thể bổ sung thêm các véctơ để được cơ sở của không gian V là $S'' = \{v'_1, v'_2, ..., v'_m, v'_{m+1}, ..., v'_n\}$. Thực hiện quá trình trực giao hoá Gram-Smidt vào hệ S▮ ta thu được cơ sở trực chuẩn $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ của W và $\{v_1, v_2, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ của V. Khi đó:

$$\forall u \in V, u = \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_m v_m}_{u'} + \underbrace{a_{m+1} v_{m+1} + ... a_n v_n}_{u-u'}$$

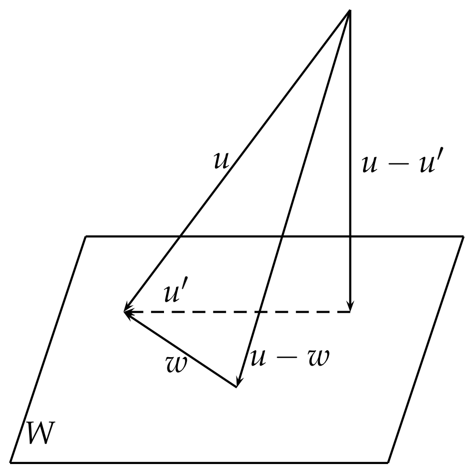
Rõ ràng $u' \in W$ và $(u - u') \perp W$.

b) Ta có

$$\|u - \mathrm{w}\|^2 = \|(u - u') + (u' - \mathrm{w})\|^2 = \|u - u'\|^2 + \|u' - \mathrm{w}\|^2 \geq \|u - u'\|^2$$

do $(u - u') \perp$W nên $(u - u') \perp (u' - w) \in W$

Ý nghĩa hình học: Nếu gọi u là một véctơ trong không gian $\mathbb{R}^3$ và W là mặt phẳng bất kì thì u' chính là hình chiếu của véctơ u lên mặt phẳng W, còn khẳng định của câu $b)$ của bài toán nói lên rằng độ dài của đường vuông góc bao giờ cũng ngắn hơn độ dài của đường xiên bất kì (xem hình vẽ).



$$\|u - u'\| \leq \|u - w\|$$

■

Bài tập 5.10. Tìm hình chiếu của véc tơ này lên véc tơ kia

a) $u = (1, 3, -2, 4), v = (2, -2, 4, 5)$

b) $u = (4, 1, 2, 3, -3), v = (-1, -2, 5, 1, 4)$

Lời giải. Yêu cầu bài toán tương đương với tìm hình chiếu của u lên $W = \text{span}(v)$.

a) **Cách 1:** W có một cơ sở trực chuẩn là $S = \left\{ v_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{7}(2, -2, 4, 5) \right\}$. Do đó:

$$w_1 = < u, v_1 > v_1 = \left\langle (1, 3, -2, 4), \frac{1}{7}(2, -2, 4, 5) \right\rangle . \frac{1}{7}(2, -2, 4, 5) = \frac{8}{49}(2, -2, 4, 5)$$

là hình chiếu của u lên v.

Cách 2: Phân tích $u = w_1 + w_2$, trong đó $w_1 \in W, w_2 \perp W$. Vì $w_1 \in W$ nên $w_1 = x.v = (2x, -2x, 4x, 5x)$, khi đó $w_2 = u - w_1 = (1 - 2x, 3 + 2x, -2 - 4x, 4 - 5x)$. Do $w_2 \perp W$ nên $w_2 \perp v$, ta có phương trình $2(1 - 2x) - 2(3 + 2x) + 4(-2 - 4x) + 5(4 - 5x) = 0$. Suy ra $x = \frac{8}{49}$ và $w_1 = \frac{8}{49}(2, -2, 4, 5)$.

Nhận xét: Hình chiếu của véctơ u lên véctơ v được xác định theo công thức:

$$w_1 = \frac{1}{\|v\|^2} < u, v >$$

■

Bài tập 5.11. Cho $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc. Cho $u_1 = (6, 3, -3, 6), u_2 = (5, 1, -3, 1)$. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian W sinh bởi $\{u_1, u_2\}$. Tìm hình chiếu của $v = (1, 2, 3, 4)$ lên W.

Lời giải. **Cách 1:** Trước hết ta đi trực giao hoá Gram-Smidt hệ $\{u_1, u_2\}$ đề thu được cơ sở trực chuẩn của W. $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{3\sqrt{10}}u_1$ Đặt $\overline{v_2} = u_2 + tv_1$ trong đó,

$$t = -< u_2, v_1 >= -\left\langle u_2, \frac{1}{3\sqrt{10}}u_1 \right\rangle = -\frac{1}{3\sqrt{10}} < u_2, u_1 >= -\frac{16}{\sqrt{10}}$$

Suy ra

$$\overline{v_2} = u_2 - \frac{16}{\sqrt{10}}.\frac{1}{3\sqrt{10}}u_1 = (5, 1, -3, 1) - \frac{8}{15}(6, 3, -3, 6) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{11}{5}\right)$$

$$v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{260}}(9, -3, -7, -11) = \frac{1}{\sqrt{260}}v'$$

Cuối cùng ta có

$$\begin{aligned}
w_1 &= < v, v_1 > v_1 + < v, v_2 > v_2 \\
&= \left\langle v, \frac{1}{3\sqrt{10}}u_1 \right\rangle \frac{1}{3\sqrt{10}}u_1 + \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{260}}v' \right\rangle \frac{1}{\sqrt{260}}v' \\
&= \frac{1}{90}\langle (1, 2, 3, 4), (6, 3, -3, 6) \rangle (6, 3, -3, 6) \\
&\quad + \frac{1}{260}\langle (1, 2, 3, 4), (9, -3, -7, -11) \rangle (9, -3, -7, -11) \\
&= \frac{3}{10}(6, 3, -3, 6) - \frac{31}{130}(9, -3, -7, -11) \\
&= \left(\frac{-9}{26}, \frac{21}{13}, \frac{10}{13}, \frac{115}{26}\right)
\end{aligned}$$

Cách 2: Phân tích $v = w_1 + w_2$ trong đó $w_1 \in W, w_2 \perp W$.
Vì $w_1 \in W$ nên $w_1 = x.u_1 + y.u_2 = (6x + 5y, 3x + y, -3x - 3y, 6x + y)$,
khi đó $w_2 = v - w_1 = (1 - 6x - 5y, 2 - 3x - y, 3 + 3x + 3y, 4 - 6x - y)$. Do $w_2 \perp W$ nên $w_2 \perp u_1, w_2 \perp u_2$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6(1 - 6x - 5y) + 3(2 - 3x - y) - 3(3 + 3x + 3y) + 6(4 - 6x - y) = 0 \\ 5(1 - 6x - 5y) + (2 - 3x - y) - 3(3 + 3x + 3y) + (4 - 6x - y) = 0 \end{cases}$$

Suy ra $x = \frac{73}{78}, y = \frac{-31}{26}$ và $w_1 = \left(\frac{-9}{26}, \frac{21}{13}, \frac{10}{13}, \frac{115}{26}\right)$. ■

§4. CHÉO HOÁ TRỰC GIAO MA TRẬN - PHƯƠNG PHÁP CHÉO HOÁ TRỰC GIAO

4.1 Chéo hoá trực giao ma trận

Định nghĩa 5.40. *Ma trận vuông P được gọi là ma trận trực giao nếu $PP^t = I$.*

Định nghĩa 5.41. *Cho ma trận vuông A, nếu tồn tại ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo thì ta nói ma trận A chéo hoá trực giao được và P là ma trận làm chéo hoá ma trận trực giao A.*

Định lý 5.26 (Điều kiện cần và đủ để một ma trận chéo hoá trực giao được). *Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A chéo hoá trực giao được là A đối xứng.*

Quy trình chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng:

Bước 1: Tìm một cơ sở cho mỗi không gian riêng của ma trận đối xứng A

Bước 2: Áp dụng quá trình trực giao hoá Gram-Smidt vào mỗi cơ sở đó đề được cơ sở trực chuẩn cho mỗi không gian riêng, ta thu được n vectơ riêng trực chuẩn $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

Bước 3: Lập ma trận P mà các cột là các vectơ xây dựng ở bước 2, ma trận P này sẽ làm chéo hoá ma trận A, tức

$$A' = P^{-1}AP = P^tAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

4.2 Phương pháp chéo hoá trực giao để rút gọn một dạng toàn phương

Giả sử dạng toàn phương Q có ma trận là ma trận đối xứng A trong một cơ sở trực chuẩn $\mathcal{S}$ của nó.

Bước 1: Chéo hoá trực giao ma trận A bởi ma trận trực giao P, trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở trực chuẩn $\mathcal{S}$ sang cơ sở trực chuẩn $\mathcal{S}'$ mới.

Bước 2: Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

khi đó Q có dạng chính tắc

$$Q = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + ... + \lambda_n \xi_n^2$$

trong cơ sở $\mathcal{S}'$ mới.

4.3 Nhận dạng đường cong phẳng

Xét phương trình một đường cong bậc 2 tổng quát sau:

$$ax_1^2 + 2bx_1 + cx_2^2 + 2gx_1 + 2hx_2 + d = 0$$

Vế trái của phương trình là tổng của hai hàm, một hàm bậc nhất p và một dạng toàn phương q với $q = ax_1^2 + 2bx_1 + cx_2^2, p = 2gx_1 + 2hx_2 + d$. Muốn nhận dạng được đường cong trên thuộc dạng đường cong nào chúng ta thực hiện phép đổi biến trực giao để đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc rồi biện luận theo kết quả thu được. Chú ý rằng bắt buộc phải dùng phương pháp trực giao để nhận dạng một đường cong bậc hai, vì chỉ có phép biến đổi trực giao mới là phép biến đổi bảo toàn khoảng cách. Phép biến đổi Lagrange và Jacobi không có tính chất này, vì vậy nếu sử dụng các phép biến đổi Lagrange và Jacobi thì có thể dẫn đến việc nhận **nhầm** một đường tròn với một ellipse chẳng hạn.

4.4 Nhận dạng mặt bậc hai

Xét phương trình một mặt bậc hai tổng quát:

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2rx_1x_2 + 2sx_1x_3 + 2tx_2x_3 + 2ex_1 + 2gx_2 + 2hx_3 + d = 0$$

Vế trái là tổng của hai hàm, một dạng toàn phương q và một hàm bậc nhất p với:

$$\begin{cases} q = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2rx_1x_2 + 2sx_1x_3 + 2tx_2x_3 \\ p = 2ex_1 + 2gx_2 + 2hx_3 + d \end{cases}$$

Muốn nhận dạng được mặt cong trên thuộc dạng mặt bậc hai nào chúng ta thực hiện phép đổi biến trực giao để đưa dạng toàn phương q về dạng chính tắc rồi biện luận theo kết quả thu được. Cũng tương tự như nhận dạng đường cong, bắt buộc phải sử dụng phép biến đổi trực giao khi nhận dạng mặt bậc hai. Nếu sử dụng phép biến đổi Lagrange hoặc Jacobi thì có thể dẫn đến việc nhận **nhầm** một hình cầu và ellipsoid chẳng hạn.

4.5 Ứng dụng của phép biến đổi trực giao vào bài toán tìm cực trị có điều kiện

Cho dạng toàn phương $Q = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ có ma trận là $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn của V. Hãy tìm cực trị của Q với điều kiện $x^tx = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. Bằng phép biến đổi trực giao $x = P\xi$ ta đưa Q về dạng chính tắc:

$$Q = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + ... + \lambda_n\xi_n^2$$

Giả sử $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$, khi đó

$$\lambda_1\xi^t\xi = \lambda_1\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \leq Q \leq \lambda_n\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 = \lambda_n\xi^t\xi$$

Vì $x = P\xi$ nên $x^tx = (P\xi)^t(P\xi) = \xi^tP^tP\xi = \xi^t\xi = 1$ nên ta có

$$\lambda_1 \leq Q \leq \lambda_n$$

Vậy Q đạt giá trị lớn nhất là λ_n tại $\xi^M = (0, 0, ..., 1)$ tức là tại $x = P\xi^M$. Q đạt giá trị nhỏ nhất là λ_1 tại $\xi^m = (1, 0, ..., 0)$ tức là tại $x = P\xi^m$

4.6 Bài tập

Bài tập 5.12. Chéo hoá trực giao các ma trận sau

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.13. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$

b) $7x_1^2 - 7x_2^2 + 48x_1x_2$

c) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

d) $5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

Lời giải. Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ma trận A có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, ứng với nó ta tìm được 3 vectơ trực chuẩn là

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vậy thực hiện phép đổi biến

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

ta được

$$q = \xi_2^2 + 2\xi_3^2$$

■

Bài tập 5.14. Nhận dạng đường cong phẳng sau:

a) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

b) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$

c) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

d) $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 24$

e) $x^2 + xy - y^2 = 18$

f) $x^2 - 8xy + 10y^2 = 10$

Lời giải. b) Dùng phương pháp trực giao để rút gọn dạng toàn phương. Với ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ta có phương trình đặc trưng là

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 2$$

ứng với 2 trị riêng vừa tìm được ta tìm được 2 vectơ riêng trực chuẩn tương ứng là $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Thực hiện phép đổi biến $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ ta thu được

$$Q = 0\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[8\left(\xi_1 + \xi_2\right) + \left(-\xi_1 + \xi_2\right)\right]$$

Đường cong đã cho là một parabol. ■

Bài tập 5.15. Nhận dạng các mặt bậc 2 sau:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4$

b) $5x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 2yz = 1$

c) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 16$

d) $7x^2 - 7y^2 + 24xy + 50x - 100y - 175 = 0$

e) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$

f) $2xy + 2yz + 2xz - 6x - 6y - 4z = 0$

Lời giải. a) Dùng phương pháp trực giao để rút gọn dạng toàn phương $q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ma trân A có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, ứng với nó ta tìm được 3 vectơ trực chuẩn là

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vậy thực hiện phép đổi biến $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$, ta được $q = \xi_2^2 + 2\xi_3^2$. Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow \xi_2^2 + 2\xi_3^2 = 4$, vậy mặt cong đã cho là một mặt trụ.

b) Dùng phương pháp trực giao để rút gọn dạng toàn phương $q = 5x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, ma trân A có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 + \sqrt{10}, \lambda_3 = 4 - \sqrt{10}$, giả sử ứng với nó ta tìm được 3 vectơ trực chuẩn là

$$v_1 = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix}$$

Vậy thực hiện phép đổi biến

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

ta được $q = \left(4+\sqrt{10}\right)\xi_2^2 + \left(4-\sqrt{10}\right)\xi_3^2$. Ta có

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow \left(4+\sqrt{10}\right)\xi_2^2 + \left(4-\sqrt{10}\right)\xi_3^2$$

Vậy mặt cong đã cho là một mặt trụ. ■

Bài tập 5.16. Cho $Q(x_1,x_2,x_3) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

a) Tìm $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}{Max} Q(x_1,x_2,x_3)$, $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1}{Min} Q(x_1,x_2,x_3)$. Với giá trị nào thì $Q(x_1,x_2,x_3)$ đạt max, min.

b) Tìm $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{Max} Q(x_1,x_2,x_3)$, $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{Min} Q(x_1,x_2,x_3)$

Lời giải. a) $A = \begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$, PTĐT $-\lambda^3 + 27\lambda^2 - 207\lambda + 405 = 0$, A có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 15$, và 3 vectơ riêng trực chuẩn tương ứng là:

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

ta được

$$Q = 3\xi_1^2 + 9\xi_2^2 + 15\xi_3^2$$

với điều kiện $x^t x = (P\xi)^t (P\xi) = \xi^t P^t P\xi = \xi^t\xi = 1$, nên ta có $3 \le Q \le 15$ Vậy Q đạt giá trị lớn nhất là 15 tại $\xi^M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tức là tại $x = P\xi^M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Q đạt giá trị nhỏ nhất là 3 tại $\xi^m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tức là tại $x = P\xi^m = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) Theo câu a) ta có $Q = 3\xi_1^2 + 9\xi_2^2 + 15\xi_3^2$, với điều kiện $x^t x = (P\xi)^t (P\xi) = \xi^t P^t P\xi = \xi^t\xi = 16$, nên ta có $48 \le Q \le 240$. Vậy Q đạt giá trị lớn nhất là 240 tại $\xi^M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ tức là tại $x = P\xi^M = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Q đạt giá trị nhỏ nhất là 48 tại $\xi^m = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tức là tại $x = P\xi^m = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ■

Chú ý: Xét bài toán: cho dạng toàn phương $Q = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ có ma trận là $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn của V. Hãy tìm cực trị của Q với điều kiện $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$. Khi đó đặt $y_i = \frac{x_i}{a_i}$ thì $Q = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_i y_j$, và điều kiện trở thành $xy_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 = 1$, chúng ta quy về bài toán tìm cực trị đã xét ở trên.

Bài tập 5.17. Cho A, B là các ma trận vuông đối xứng cấp n có các trị riêng đều dương. Chứng minh $A + B$ cũng có các trị riêng dương

Lời giải. Giả sử A, B là ma trận của các dạng toàn phương ψ, φ trong một cơ sở trực chuẩn nào đó của $\mathbb{R}^n$, tức là

$$\begin{cases} \psi(x,x) = x^t Ax \\ \varphi(x,x) = x^t Bx \end{cases}$$

Khi đó $(\psi + \varphi)(x,x) = x^t (A+B)x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, tức là $A + B$ là ma trận của dạng toàn phương $\psi + \varphi$ trong cơ sở trực chuẩn đó. Do các trị riêng của A, B đều dương nên ψ, φ là các dạng toàn phương xác định dương. Tổng của hai dạng toàn phương xác định dương là một dạng toàn phương xác định dương nên $\psi + \varphi$ xác định dương, và do đó $A + B$ cũng có các trị riêng dương. ■

Bài tập 5.18. Trong không gian Ơclit n chiều V , với cơ sở trực chuẩn $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, cho f là biến đổi tuyến tính có ma trận A trực giao. Chứng minh $< f(x), f(y) >=< x, y >$ với mọi x, y của V.

Lời giải. Lời giải: Giả sử $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n, y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$. Khi đó ta có biểu thức toạ độ của tích vô hướng trong cơ sở trực chuẩn B của không gian Euclide V như sau:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = [x]_B^t [y]_B$$

Vậy

$$\begin{aligned} < f(x), f(y) > &= [f(x)]_B^t [f(y)]_B \\ &= (A [x]_B)^t (A [y]_B) \\ &= [x]_B^t A^t A [y]_B \\ &= [x]_B^t [y]_B \\ &=< x, y > \end{aligned}$$

■

Bài tập 5.19. Trong không gian Ơclit n chiều V , với cơ sở trực chuẩn $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, cho f là biến đổi tuyến tính trên V có tính chất $\|f(x)\| = \|x\|$ với mọi véc tơ x của V. Chứng minh $< f(x), f(y) >=< x, y >$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh:

$$< f(e_i), f(e_j) >=< e_i, e_j >= \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$$

Thật vậy. Nếu $i = j$ thì $< f(e_i), f(e_i) >= \|f(e_i)\|^2 = \|e_i\|^2 = 1$.
Nếu $i \neq j$ thì $\|f(e_i) + f(e_j)\|^2 = \|f(e_i + e_j)\|^2 = \|e_i + e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = \|f(e_i)\|^2 + \|f(e_j)\|^2$ nên $< f(e_i), f(e_j) >= 0$.
Đến đây chúng ta có 2 cách lập luận:

Cách 1: Gọi $A = [[f(e_1)]_B, [f(e_2)]_B, ..., [f(e_n)]_B]$ là ma trận của ánh xạ f trong cơ sở B. Vì $< f(e_i), f(e_j) >=< e_i, e_j >= \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$ nên $A^{-1} = A^t$. Theo bài 18 ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Giả sử $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n, y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$ thì

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

$$\begin{aligned} &< f(x), f(y) > \\ &=< x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n), y_1f(e_1) + y_2f(e_1) + ... + y_nf(e_n) > \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \\ &=< x, y > \end{aligned}$$

■

Bài tập 5.20. Cho V là không gian Ơclit n chiều, V_1 là không gian con m chiều của V. Gọi $V_2 = \{x \in V | x \perp v, \forall v \in V_1\}$.

a) Chứng minh V_2 là không gian véctơ con của V.

b) Chứng minh V_1 và V_2 bù nhau.

c) Tìm $\dim V_2$

Lời giải. a) Ta cần chứng minh:

$$\begin{cases} \forall x, y \in V_2 & \text{thì } x + y \in V_2 \\ \forall k \in R, x \in V & \text{thì } kx \in V_2 \end{cases}$$

Dễ kiểm tra.

b) Ta cần chứng minh: $\begin{cases} V_1 + V_2 = V \\ V_1 \cap V_2 = \{0\} \end{cases}$. Thật vậy: Với mọi $u \in V$, gọi u_1 là hình chiếu trực giao của u lên V_1, u_2 là thành phần của u trực giao với V_1. Khi đó ta có $u = u_1 + u_2$, và do đó $V \subseteq V_1 + V_2$. Mặt khác V_1, V_2 là các không gian vectơ con của V nên $V_1 + V_2 \subseteq V$. Suy ra $V_1 + V_2 = V$.
Hơn nữa nếu $u \in V_1 \cap V_2$ thì $< u, u >= 0$, do đó $u = 0$. Vậy $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

c) Ta gọi $f : V \to V_1, f(u) = u_1$, trong đó u_1 là hình chiếu trực giao của u lên V_1, là ánh xạ chiếu trực giao. Dễ dàng chứng minh f là ánh xạ tuyến tính. Do f là toàn ánh nên $\operatorname{Im} f = V_1$, hơn nữa $u \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow u \in V_2$ nên $\operatorname{Ker} f = V_2$. Khi đó

$$n = \dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V_1 + \dim V_2$$

Suy ra $\dim V_2 = n - m$. ■

Bài tập 5.21. Cho V là không gian Ơclit n chiều, chứng minh điều kiện cần và đủ để ánh xạ $f : V \to \mathbb{R}$ tuyến tính là tồn tại véctơ a cố định của V để $f(x) =< a, x >, \forall x \in V$

Lời giải. $\boxed{\Leftarrow}$ Điều kiện đủ: Dễ dàng chứng minh ánh xạ $f(x) =< a, x >, \forall x \in V$ là ánh xạ tuyến tính với mỗi vectơ a cố định đã được chọn trước.

$\boxed{\Rightarrow}$ Điều kiện cần: Giả sử $f : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính bất kỳ.

(a) Nếu $f \equiv 0$ thì ta chọn vectơ $a = 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

(b) Nếu $f \not\equiv 0$. Ta sẽ chứng minh $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$. Thật vậy, vì $f \not\equiv 0$ nên tồn tại ít nhất một vectơ $y \in V, y \notin \operatorname{Ker} f$. Cố định một vectơ y như vậy, khi đó với mỗi $x \in V$, đặt $\lambda = \frac{f(x)}{f(y)}, z = x - \lambda y = x - \frac{f(x)}{f(y)} y$ thì $f(z) = 0 \Rightarrow z \in \operatorname{Ker} f$.
Ta có $x = z + \lambda y$, tức là mỗi vectơ $x \in V$ thừa nhận phân tích thành tổng của 2 vectơ, một vectơ thuộc $\operatorname{Ker} f$ và một vectơ thuộc $\operatorname{span} y$. Điều đó có nghĩa là $V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{span} y$ và suy ra $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$.
Bây giờ giả sử V có phân tích thành tổng trực giao $V = \operatorname{Ker} f + (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ thì

$\dim(\mathrm{Ker}f)^{\perp} = 1$, tức $(\mathrm{Ker}f)^{\perp} = \mathrm{span}(y_0)$, trong đó $\|y_0\| = 1$. Đặt $a = f(y_0)y_0 \in (\mathrm{Ker}f)^{\perp}$, ta sẽ chứng minh vectơ a thoã mãn yêu cầu bài ra, tức là $f(x) =< a, x >, \forall x \in V$. Thật vậy: Với mỗi $x \in V$, do $V = \mathrm{Ker}f + (\mathrm{Ker}f)^{\perp} = \mathrm{Ker}f + \mathrm{span}(y_0)$ nên $x = \lambda y_0 + y, y \in \mathrm{Ker}f$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lambda f(y_0) + f(y) \\
&= \lambda f(y_0) \\
&= \lambda < f(y_0)y_0, y_0 > \\
&= \lambda < a, y_0 > \\
&=< a, \lambda y_0 > \\
&=< a, \lambda y_0 + y > \left(< a, y >= 0 \text{ do } a \in (\mathrm{Ker}f)^{\perp}, y \in (\mathrm{Ker}f)\right) \\
&=< a, x >
\end{aligned}$$

■

Bài tập 5.22. Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các véc tơ $v_1 = (1,1,0,0,0), v_2 = (0,1,-1,2,1), v_3 = (2,3,-1,2,1)$ .Gọi $V = \left\{x \in R^5 \middle| x \perp v_i, i = 1,2,3\right\}$

a) Chứng minh V là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^5$.

b) Tìm $\dim V$.

Lời giải. **Cách 1.** Đặt $W = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, theo bài tập 5.20 ta đã chứng minh $V = W^{\perp}$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^5$, và

$$\dim V = 5 - \dim W = 5 - \mathrm{rank}\{v_1, v_2, v_3\} = 5 - 2 = 3$$

Cách 2. Nhận xét rằng vì $V = \left\{x \in R^5 \middle| x \perp v_i, i = 1,2,3\right\}$ nên V chính là không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}
x_1 + x_2 & = 0 \\
x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\
2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0
\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp Gauss ta được $\dim V = 3$ và một cơ sở của V là $\{(-1,1,1,0,0), (2,-2,0,1,0), (1,-1,0,0,1)\}$. ■