

ĐỀ CƯƠNG BÀI TẬP GIẢI TÍCH I - TỪ K62**Nhóm ngành 2****Mã số : MI 1112**

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3: Tự luận, 60 phút.

Nội dung: Chương 1, đến hết mục 1.8, Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7: Tự luận, 90 phút.

Chương 1**Phép tính vi phân hàm một biến số****1.1-1.3. Dãy số, hàm số**

1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt[4]{\log(\tan x)}$

d) $y = \arccos(\sin x)$

b) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

e) $y = \arcsin(\sin x)$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

f) $y = \sin(\arcsin x)$.

2. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sinh(-x) = -\sinh x,$

b) $\cosh(-x) = \cosh(x),$

c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$

d) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$

e) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$

f) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$

g) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

3. Tìm miền giá trị của hàm số

a) $y = \lg(1 - 2 \cos x)$

c) $y = \arctan(\sin x)$

b) $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$

d) $y = \arctan(e^x)$.

4. Tìm $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$.

5. Tìm hàm ngược của hàm số

a) $y = 2x + 3$

b) $y = \frac{1-x}{1+x}$

c) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$

c) $f(x) = \sin x + \cos x$

b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

d) $f(x) = \arcsin x$.

7. Chứng minh rằng bất kỳ hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a)$, ($a > 0$) cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ.

8. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của hàm số sau (nếu có)

a) $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$

d) $f(x) = \cos^2 x$

b) $f(x) = \sin(x^2)$

e) $f(x) = \cos x + \cos x\sqrt{2}$

c) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$

f) $f(x) = \sin x + \sin x\sqrt{2}$.

1.4-1.5. Giới hạn hàm số

9. Tìm giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2},$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

10. Tìm giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} \sqrt[n]{1 + \beta x} - 1}{x}.$$

11. Tìm giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x + 1} - \sin \sqrt{x})$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

12. Tìm giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} [\sin(\ln(x + 1)) - \sin(\ln x)]$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0.$$

13. Khi $x \rightarrow 0^+$ cặp VCB sau có tương đương không?

$$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \text{ và } \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x.$$

1.6. Hàm số liên tục

14. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

15. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

$$a) y = \frac{8}{1 - 2^{\cot x}} \quad b) y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \quad c) y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x},$$

$(a \neq b)$

1.7. Đạo hàm và vi phân

16. Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{nếu } x < 1, \\ (1 - x)(2 - x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

17. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

a) Liên tục tại $x = 0$

b) Khả vi tại $x = 0$

c) Có đạo hàm liên tục tại $x = 0$.

18. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

19. Tìm vi phân của hàm số

$$a) y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, (a \neq 0)$$

$$c) y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|, (a \neq 0)$$

$$b) y = \arcsin \frac{x}{a}, (a \neq 0)$$

$$d) y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

20. Tìm

a) $\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$ b) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$ c) $\frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9)$.

21. Tính gần đúng giá trị của biểu thức

a) $\log 11$ b) $\sqrt[7]{\frac{2 - 0.02}{2 + 0.02}}$.

22. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a) $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$ c) $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$
b) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$ d) $y = x^2 \sin x$, tính $y^{(50)}$.

23. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ c) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$
b) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ d) $y = e^{ax} \sin(bx + c)$.

1.8. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

24. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

25. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad -1 \leq x \leq 1$$

26. Chứng minh bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ b) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a$.

27. Tìm giới hạn

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2 - x) \\
\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}} \\
\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)} \\
\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}.
\end{array}$$

28. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

29. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b) . Chứng minh rằng với mọi $x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$$

30. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a) $y = x^3 + x$

b) $y = \arctan x - x$

31. Chứng minh bất đẳng thức

a) $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

b) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$.

32. Tìm cực trị của hàm số

a) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

c) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

b) $y = x - \ln(1+x)$

d) $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

1.9. Giới thiệu các loại đường cong

34. Khảo sát hàm số

$$\text{a) } y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$$

$$\text{b) } y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\text{c) } y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$$

$$\text{d) } y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = \frac{2t}{1 - t^2} \\ y = \frac{t^2}{1 + t} \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$$

$$\text{g) } r = a + b \cos \varphi, (0 < a \leq b)$$

$$\text{h) } r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, (a > 0).$$

Chương 2

Phép tính tích phân hàm một biến số

2.1 Tích phân bất định

1. Tính các tích phân

$$\text{a) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$$

$$\text{e) } \int \frac{x dx}{(x+2)(x+5)}$$

$$\text{b) } \int |x^2 - 3x + 2| dx$$

$$\text{f) } \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{g) } \int \sin x \sin(x+y) dx$$

$$\text{d) } \int \frac{x dx}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$$\text{h) } \int \frac{1 + \sin x}{\sin^2 x} dx.$$

2. Tính các tích phân

$$\text{a) } \int \arctan x dx$$

$$\text{e) } \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$$

$$\text{b) } \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx$$

$$\text{f) } \int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx$$

$$\text{c) } \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$\text{g) } \int e^{-2x} \cos 3x dx$$

$$\text{d) } \int x\sqrt{-x^2+3x-2} dx$$

$$\text{h) } \int \arcsin^2 x dx.$$

3. Lập công thức truy hồi tính I_n

$$\text{a) } I_n = \int x^n e^x dx$$

$$\text{b) } I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}.$$

2.2. Tích phân xác định

4. Tính các đạo hàm

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt$$

$$\text{b) } \frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

5. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$

6. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\tan x \int_0^{\sin x} \sqrt{\sin t} dt}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$

7. Tính các tích phân sau

a) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| (x+1) dx$

d) $\int_0^3 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx$

b) $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$

e) $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

c) $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$

f) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx.$

8. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$ b) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx.$

9. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Khi đó $f^2(x), g^2(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng khả tích trên $[a, b]$. Chứng minh bất đẳng thức (với $a < b$)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

2.3. Tích phân suy rộng

10. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

$$\text{a) } \int_{-\infty}^0 x e^x dx$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{b) } \int_0^{+\infty} \cos x dx$$

$$\text{d) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

11. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$$

$$\text{d) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x}$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$$

$$\text{e) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$\text{f) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$$

12. Nếu $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ thì có suy ra được $f(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$ không?

Xét ví dụ $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

13. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$. Hỏi

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ có hội tụ không.

2.4. Ứng dụng của tích phân xác định

14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Đường parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

b) Parabol bậc ba $y = x^3$ và các đường $y = x, y = 2x, (x \geq 0)$

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và parabol $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

d) Đường $y^2 = x^2 - x^4$.

15. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2, (a > 0)$.

16. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt paraboloid $z = 4 - y^2$, các mặt

phẳng tọa độ $x = 0, z = 0$ và mặt phẳng $x = a$ ($a \neq 0$).

17. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$

a) Quay quanh trục Ox một vòng

b) Quay quanh trục Oy một vòng.

18. Tính độ dài đường cong

a) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ khi x biến thiên từ 1 đến 2.

b)
$$\begin{cases} x = a \left(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \\ y = a \sin t \end{cases}$$
 khi t biến thiên từ $\frac{\pi}{3}$ đến $\frac{\pi}{2}$ ($a > 0$).

19. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ quay quanh trục Ox

b) $y = \frac{1}{3}(1 - x)^3, 0 \leq x \leq 1$ quay quanh trục Ox .