**Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội**

**Viện Toán ứng dụng và Tin học - 2018**

**BÀI TẬP GIẢI TÍCH III (Phương trình vi phân và chuỗi)**
**Nhóm học 1: Mã MI1131**

**Kiểm tra giữa kỳ : Tự luận**

**Thi cuối kỳ : Tự luận**

## I. CHUỖI

**1) Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau**

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$

b) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

c) $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{4^n}-\frac{5}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$

**2)** Các chuỗi sau hội tụ hay phân kỳ? tại sao?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{3}{5^n}\right]$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

**3) Sử dụng các tiêu chuẩn: So sánh; D'Alembert; Cauchy; Tích phân, xét sự hội tụ của các chuỗi sau**

| | | |
|---|---|---|
| a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n^2+1}$ | b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$ | c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n^2-1}\right)^2$ |
| d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$ | e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ | f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ |
| g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ | h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{1+n}{n-1}$ | i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{1+n}{n}\right)$ |
| k) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\tan\frac{1}{n^2}$ | l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$ | m) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$ |

**4) Xét sự hội tụ của các chuỗi số**

| | | |
|---|---|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ | b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$ | c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$ |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)n}$ | e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$ |
| g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2}$ | h*) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right]$ | i) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$ |
| k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$ | | |

**5) Xét sự hội tụ của các chuỗi số**

| | |
|---|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$ | b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n-\ln n}$ |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin(e^{-n})$ | d) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right),\quad a\in\mathbb{R}$ |
| e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3},\quad a\in\mathbb{R}$ |
| g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}\cdot2^n}{(n+1)^{n^2}}$ | h) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}},\quad \alpha>0,\beta>0$ |
| i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2\cos n\alpha}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}},\quad \alpha\in\mathbb{R}$ | k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na}{(1-a^2)^n},\quad a\in\mathbb{R},0<\|a\|\neq1$ |

**6) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau**

| | | |
|---|---|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$ | b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ | c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{xn^x}$ |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{2^{nx}}$ | e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$ |
| g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^{\alpha}}\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n,\quad \alpha\in\mathbb{R}$ | h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^nx^n}\right)$ | |

| | | |
|---|---|---|
| i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^{n^n}}$ | k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5}(x+2)^{1-2n}$ | |

**7) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều trên các tập tương ứng**

| | |
|---|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ trên $\mathbb{R}$ | b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ trên [-1,1] |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ trên $[0,+\infty)$ | d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ trên $\mathbb{R}$ |

**8) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau**

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^2}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(x-1)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n+5}}{n^2+4}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^{2n}}{n2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2+1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x+3)^n$

**9) Tính tổng của các chuỗi sau**

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)},\quad x\in(-3,3)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 3^{n-1}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},\quad x\in(-1,1)$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{n^2+n}\right)x^n,\quad x\in(-1,1)$

**10. Khai triển thành chuỗi Maclaurin**

a) $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2-4x+3}$ b) $f(x)=\sin 3x + x\cos 3x$

c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ d) $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$

**11.** a) Khai triển $f(x)=\sqrt{x}$ thành chuỗi lũy thừa của x - 4

b) Khai triển $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}$ thành chuỗi lũy thừa của x -1

c) Khai triển $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ thành chuỗi lũy thừa của x + 4

d) Khai triển $f(x)=\ln x$ thành chuỗi lũy thừa của $\frac{1-x}{1+x}$

**12) a) Khai triển Fourier các hàm số sau**

(1) $f\left(x\right)=|x|, \quad |x|< 1$, bằng cách kéo dài $f$ thành hàm tuần hoàn với chu kỳ 2.

(2) $f\left(x\right)=2x, \quad 0<x< 1$, bằng cách kéo dài $f$ thành hàm chẵn trên (-1,1), tuần hoàn chu kỳ 2. Nếu kéo dài $f$ thành hàm lẻ trên (-1,1), tuần hoàn chu kỳ 2, thì dạng của khai triển Fourier sẽ như thế nào?

(3) $f\left(x\right)=10-x, \quad 5<x<15$, bằng cách kéo dài $f$ thành hàm tuần hoàn với chu kỳ 10.

**b)** Cho $f\left(x\right)=x^2$ trên $[-\pi,\pi]$. Hãy khai triển Fourier của hàm $f\left(x\right)$, sau đó tính tổng các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

## II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

### 1. Phương trình phân li

| | |
|---|---|
| a) $\tan ydx-x\ln xdy=0$ | b) $y'\cos x=y$ |
| c) $\frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\frac{3y+2}{x+1}y'$ | d) $y'=a\cos y+b \ \left(b>a>0\right)$ |
| e) $y'-y^2-3y+4=0$ | f) $y'\left(2x+y\right)=1$ |
| g) $y'=\sin\left(y-x-1\right)$ | h) $y'=\frac{x-y-1}{x-y-2}$ |
| i) $x^2\left(y^3+5\right)dx+\left(y^3+5\right)y^2dy, \quad y\left(0\right)=1$<br>k) $xydx+\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}dy=0, \quad y(\sqrt{8})=1$ | |

### 2. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp một

| | |
|---|---|
| a) $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1$ | b) $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y$ |
| c) $x^2y'+y^2+xy+x^2=0$ | d) $(x+2y)dx-xdy=0$ |
| e) $xydy-y^2dx=(x+y)^2e^{-\frac{y}{x}}dx$ | f) $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$ |
| g) $xy'=y\ln\frac{y}{x}$, $y(1)=1$ | h) $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$, $y(1)=1$ |

**3. Phương tình vi phân tuyến tính cấp một**

| | |
|---|---|
| a) $y'-2xy=1-2x^2$ | b) $y'=\frac{1}{x}(2y+xe^x-2e^x)$ |
| c) $x(1+x^2)\,y'+y=\arctan(x)$ | d) $y'(x+y^2)=y$ |
| e) $(2xy+3)dy-y^2dx=0$ | f) $(1+y^2)dx=(\arctan y-x)dy$ |
| g) $y'+y\cos x=\sin x\ \cos x$, $y(0)=0$ | h) $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$, $y(0)=0$ |

**4. Phương trình Bernoulli**

| | |
|---|---|
| a) $y'+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$ | b) $y'+\frac{y}{x}=x^2y^4$ |
| c) $y'-2y\tan x+y^2\sin^2x=0$ | d) $ydx+(x+x^2y^2)\,dy=0$ |
| e) $3dy+(1+3y^3)y\sin xdx=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ | |
| f) $(y^2+2y+x^2)y'+2x=0$, $y(1)=0$ | |

**5. Phương trình vi phân toàn phần**

a) $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$

b) $\left(y+\frac{2}{x^2}\right)dx+\left(x-\frac{3}{y^2}\right)dy=0$

c) $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$

d) $e^ydx-(xe^y-2y)dy=0$, $y(1)=0$

**6) Tìm thừa số tích phân $\alpha(y)$ để phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần và giải phương trình đó với $\alpha$ tìm được**

$$\left(2xy^2 - 3y^3\right)dx + \left(y - 3xy^2\right)dy = 0$$

**7) Tìm thừa số tích phân $\alpha(x)$ để phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần và giải phương trình đó với $\alpha$ tìm được**

$$\left[\frac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right]dx + \frac{1}{x+y}dy = 0$$

**8) Giải các phương trình sau**

a) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

b) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(0) = 1$

c) $y' - \dfrac{y-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

d) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, \quad y(0) = \dfrac{9}{4}$

**9) Chứng minh rằng**

a) $y = x\int_1^x e^{t^2}dt$ là nghiệm của phương trình $xy' - y = x^2e^{x^2}$

b) $y = x + \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$ là nghiệm của phương trình $(1-x)dy = (1 + x - y)dx$

**10) Giải các phương trình sau**

a) $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$

b) $y'' + y = 4x\sin x$.

c) $y'' + y = xe^x + 3e^{-x}$

d) $y'' - 4y' - 8y = e^{2x} + \sin 2x$

e) $y'' + y = 2\cos x\cos 2x$.

f) $y'' - 2y' + y = \sin x + \sinh x$

**11) Giải các phương trình sau**

a) $y'' - y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

b) $y'' + y' = \tan x$

c) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$

**12)** Giải phương trình $(2x-2^2)y''+2(x-1)y'-2y=-2$ biết nó có hai nghiệm riêng $y_1=x$ và $y_2=1$

**13)** Giải phương trình $(x^2+1)y''+2xy'+\dfrac{4y}{x^2+1}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ với phép biến đổi $x=\tan t$.

**14) Giải các phương trình sau**

a) $y''-2my'+m^2y=(x-1)e^{mx}+2\sin x,\quad m\in\mathbb{R}$

b) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}+(2x-1)e^x+2$

**15)** Một vật thể với trọng lượng 2 N, được treo vào lò xo làm lò xo dãn ra thêm 6cm ở vị trí cân bằng. Ta kéo vật thể đó xuống thêm 3 cm nữa và thả ra để nó dao động tự do và không tắt dần: a) Xác định hằng số tỷ lệ *k* của lò xo trong định luật Hook.

b) Xác định vị trí *u* của vật thể ở bất kỳ thời gian *t* nào.

c) Tìm tần số, chu kỳ, và biên độ của dao động.

**16)** Một vật thể với trọng lượng 2 N được treo vào một lò xo và kéo dài lò xo thêm đoạn 10cm đến vị trí cân bằng. Vật thể được truyền một vận tốc ban đầu là 3cm/sec và bắt đầu di chuyển từ vị trí cân bằng trong một môi trường chịu ảnh hưởng lực cản nhớt là 2N mỗi khi vận tốc vật thể là 4cm/sec.

a) Hãy lập bài toán giá trị ban đầu mô tả chuyển động của vật thể

b) Giải bài toán giá trị ban đầu đó.

c) Giả sử có một ngoại lực *f* tác động vào vật thể với $f(t)=2\cos\omega t$. Viết phương trình mô tả dao động với ngoại lực và giải phương trình này. Tìm giá trị của tần số $\omega$ để biên độ giao động là lớn nhất.

**17)** Một một vật thể với trọng lượng 4 N kéo dài một lò xo 1,5 cm về vị trí cân bằng. Vật thể được được kéo thêm 2 cm theo hướng dương kể từ vị trí cân bằng của nó và được thả ra mà không có vận tốc ban đầu. Giả sử rằng không có sự tắt dần và có ngoại lực là 2 cos 3t (N).
(a) Xây dựng bài toán giá trị ban đầu mô tả chuyển động của vật thể.
(b) Giải bài toán giá trị ban đầu ở trên
(c) Nếu ngoại lực được thay bằng một lực 4 sin ωt, tìm giá trị của tần số ω để cộng hưởng xảy ra.

**18) Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = x + y + z \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x-y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{x-y} \end{cases}$

## III. Phép biến đổi Laplace:

**1. Sử dụng định nghĩa, tìm trực tiếp biến đổi Laplace của các hàm số sau**

a) $f(t) = t$ b) $f(t) = e^{3t+1}$ c) $f(t) = \sinh(kt)$ d) $f(t) = \sin^2 t$

**2. Sử dụng bảng phép biến đổi Laplace, tìm phép biến đổi Laplace của hàm số sau**

| | | |
|---|---|---|
| a) $f(t) = \sqrt{t + 3t}$ | b) $f(t) = t - 2e^{3t}$ | c) $f(t) = 1 + \cosh(5t)$ |
| d) $f(t) = \cos^2(2t)$ | e) $f(t) = (1+t)^3$ | f) $f(t) = te^t$ |
| g) $f(t) = \sin 3t \cos 3t$ | h) $f(t) = \sinh^2 3t$ | |

**3. Sử dụng bảng phép biến đổi Laplace, tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm số sau**

a) $F(s) = \dfrac{3}{s^4}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^{5/2}}$ c) $F(s) = \dfrac{3}{s-4}$

d) $F(s) = \dfrac{5-3s}{s^2+9}$ e) $F(s) = \dfrac{10s-3}{25-s^2}$ f) $F(s) = 2s^{-1}e^{-3s}$

**4. Tìm phép biến đổi Laplace nghịch đảo của các hàm số sau**

a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$ c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$ e) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

**5. Chứng minh rằng**

a) $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n}{s-a}\,\mathcal{L}\{t^{n-1}e^{at}\}$ b) $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad n = 1,2,3...$

c) $\mathcal{L}\{t\sinh kt\} = \dfrac{2sk}{(s^2-k^2)}$

**6. Áp dụng Định lí phép tịnh tiến để tìm phép biến đổi Laplace của hàm số sau**

a) $f(t) = t^4 e^{\pi t}$ b) $f(t) = e^{-2t}\sin 3\pi t$ c) $f(t) = e^{\frac{-t}{2}}\cos 2\left(t - \dfrac{\pi}{8}\right)$

**7. Áp dụng định lí phép tịnh tiến để tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau**

a) $F(s) = \dfrac{3}{2s-4}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+4}$ c) $F(s) = \dfrac{3s+5}{s^2-6s+25}$

**8. Sử dụng các phân thức đơn giản để tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau**

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2-4}$ b) $F(s) = \dfrac{5-2s}{s^2+7s+10}$ c) $F(s) = \dfrac{1}{s^3-5s^2}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{s^4-16}$ e) $F(s) = \dfrac{s^2-2s}{s^4+5s^2+4}$

**9. Dùng các định lí vi, tích phân của phép biến đổi Laplace để tìm phép biến đổi Laplace của các hàm sau**

a) $f(t) = t\sin 3t$ b) $f(t) = te^{2t}\cos 3t$

c) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ d) $f(t) = \dfrac{e^{3t}-1}{t}$

**10. Áp dụng định lí tích chập để tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm sau**

a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+9)^2}$

c) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$ d) $F(s) = \dfrac{s}{(s-3)(s^2+1)}$

**11. Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải bài toán giá trị ban đầu**

a) $x''+4x=0, \quad x(0)=5, \quad x'(0)=0$

b) $x''-x'-2x=0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=2$

c) $x''+x=\sin 2t, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$

d) $x''+x=\cos 3t, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=0$

e) $x''+4x'+3x=1, \quad x(0)=0=x'(0)$

f) $x''+3x'+2x=t, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=2$

g) $x''+4x'+13x=te^{-t}, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=2$.

h) $x''+6x'+18x=\cos 2t, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=-1$

**12. Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải hệ phương trình vi phân tuyến tính sau**

c) $\begin{cases} x''+x'+y'+2x-y=0, & x(0)=y(0)=1 \\ y''+x'+y'+4x-2y=0, & x'(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x''+2x+4y=0, & x(0)=y(0)=0 \\ y''+x+2y=0, & x'(0)=y'(0)=-1 \end{cases}$

**13. Giải phương trình vi phân cấp cao với điều kiện ban đầu**

a) $x''+6x'+25x=0, \quad x(0)=2, \quad x'(0)=3$.

b) $x''-4x=3t, \quad x(0)=x'(0)=0$

c) $x^{(3)}+x''-6x'=0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=x''(0)=1$

d) $x^{(4)}+x=0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=x''(0)=0, \quad x^{(3)}(0)=1$

e) $x^{(4)}+8x''+16x=0, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0, \quad x^{(3)}(0)=1$

**14. Giải bài toán với giá trị ban đầu**

$$mx''+cx'+kx=f(t), \quad x(0)=x'(0)=0$$

a) $m=1, \quad k=4, \quad c=0, \quad f(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t<\pi \\ 0, & t\ge \pi \end{cases}$

b) $m=1, \quad k=9, \quad c=0, \quad f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0\le t<2\pi \\ 0, & t\ge 2\pi \end{cases}$

c) $m=1, \quad k=4, \quad c=4, \quad f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<2 \\ 0, & t\ge 2 \end{cases}$