BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2 (Nhóm 2)

CHƯƠNG 1
Hàm số nhiều biến số

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ b) $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$

c) $z = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$ d) $z = \sqrt{x\sin y}$.

2. Tìm giới hạn (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x \to 0, y \to 0)$ b) $f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{2x+y}$, $(x \to \infty, y \to \infty)$

c) $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$, $(x \to 0, y \to 0)$ d) $f(x,y) = \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$, $(x \to 0, y \to 0)$.

3. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

a) $z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ b) $z = y^2\sin\frac{x}{y}$ c) $z = \arctan\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

d) $z = x^{y^3}$, $(x>0)$ e) $u = x^{y^z}$, $(x,y,z>0)$ f) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$.

4. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của các hàm số sau

a) $f(x,y) = \begin{cases} x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2, & \textit{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \textit{nếu } x = 0. \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}, & \textit{nếu } (x,y) \neq (0;0), \\ 0, & \textit{nếu } (x,y) = (0;0). \end{cases}$

5. Giả sử $z = yf(x^2-y^2)$, ở đây f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}.$$

6. Tìm đạo hàm riêng của các hàm số hợp sau đây

a) $z = e^{u^2-2v^2}$, $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2+y^2}$

b) $z = \ln(u^2+v^2)$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$

c) $z = \arcsin(x-y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.

7. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau

a) $z = \sin(x^2+y^3)$ b) $z = \ln\tan\frac{y}{x}$

c) $z = \arctan\frac{x+y}{x-y}$ d) $u = x^{y^2 z}$.

8. Tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{(1{,}02)^2+(0{,}05)^2}$ b) $B = \ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$.

9. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a) $x^3y - xy^3 = a^4$, tính y' b) $x+y+z = e^z$, tính z'_x, z'_y

c) $\arctan\frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$, $(a \neq 0)$ tính y' d) $x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y.

10. Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

11. Tìm đạo hàm của hàm số ẩn $y(x)$, $z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

12. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm số ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}.$$

13. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$ b) $z = x^2 \ln(x + y)$ c) $z = \arctan \frac{y}{x}$.

14. Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau

a) $z = xy^2 - x^2 y$ b) $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$

15. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ b) $z = x + y - xe^y$

c) $z = x^2 + y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$ d) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

16. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

b) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$.

17. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

b) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$.

CHƯƠNG 2
Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

Ứng dụng trong hình học phẳng

1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại điểm $(-2;5)$.

b) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$.

c) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{2t^3} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ tại điểm $A(2;2)$.

d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ tại điểm $M(8;1)$.

Ứng dụng trong hình học không gian

1. Giả sử $\vec{p}(t)$, $\vec{q}(t)$, $\alpha(t)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{p}(t) + \vec{q}(t)\right) = \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{q}(t)}{dt}$.

b) $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t)\vec{p}(t)) = \alpha(t)\dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$.

c) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{p}(t)\vec{q}(t)\right) = \vec{p}(t)\dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \vec{q}(t)\dfrac{d\vec{p}(t)}{dt}$.

d) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{p}(t) \wedge \vec{q}(t)\right) = \vec{p}(t) \wedge \dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} \wedge \vec{q}(t)$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a) $\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = b\sin t\cos t \\ z = c\cos^2 t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{4}$, $(a,b,c > 0)$.

b) $x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}, \quad y = 1, \quad z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$ tại điểm ứng với $t = 0$.

3. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong:

a) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm $(2;2;3)$.

b) $z = 2x^2 + 4y^2$ tại điểm $(2;1;12)$. c) $z = \ln(2x + y)$ tại điểm $(-1;3;0)$.

4. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ tại điểm $A(1;3;4)$. b) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2;1;6)$.

CHƯƠNG 3
Tích phân kép

1. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

a) $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$ b) $\int_{0}^{1} dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ c) $\int_{0}^{2} dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{\sin y}^{1+y^2} f(x,y)dx$ e) $\int_{0}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{y} f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

2. Tính các tích phân sau

a) $\iint_D x\sin(x+y)dxdy$ với $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\ ;\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

b) $\iint_D x^2(y-x)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường cong $x = y^2$ và $y = x^2$.

c) $\iint_D |x+y|dxdy$ với $D = \{(x,y) \in R^2 : |x| \le 1\ ; |y| \le 1\}$.

d) $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$, với $D = \{(x,y) \in R^2 : |x| \le 1\ ; 0 \le y \le 2\}$.

e) $\iint_D |y-x^2|^3\, dxdy$, với $D = \{(x,y) \in R^2 : |x| \le 1\ ; 0 \le y \le 2\}$.

f) $\iint_D 2xydxdy$ với D giới hạn bởi các đường $x = y^2; x = -1; y = 0$ và $y = 1$.

g) $\iint_{|x|+|y|\le 1} \left(|x|+|y|\right)dxdy$.

h) $\iint_D (x+y)dxdy$ với D giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 \le 1; \sqrt{x} + \sqrt{y} \ge 1$.

3. Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực của $\iint_D f(x,y)dxdy$ trong đó D là miền xác định như sau:

a) $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2,\ (a,b > 0)$.

b) $x^2 + y^2 \ge 4x,\ x^2 + y^2 \le 8x,\ y \ge x,\ y \le 2x$.

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ y \ge 0,\ (a,b > 0)$.

4. Dùng phép đổi biến trong tọa độ cực, hãy tính các tích phân sau

a) $\int_{0}^{R} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$, $(R > 0)$. b) $\int_{0}^{R} dx \int_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{Rx-x^2-y^2}\, dy$, $(R > 0)$.

c) $\iint_D xydxdy$, với

1) D là mặt tròn $(x-2)^2 + y^2 \le 1$

2) D là nửa mặt tròn $(x-2)^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0$.

d) $\iint_D xydxdy$, với D là miền giới hạn bởi các đường tròn $x^2 + (y-1)^2 = 1$ và $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

5. Chuyển tích phân sau theo hai biến u và v:

a) $\int_0^1 dx \int_{-x}^{x} f(x,y)dy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

b) Áp dụng tính với $f(x,y) = (2 - x - y)^2$.

6. Tính các tích phân sau

a) $\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $D: \begin{cases} 4y \le x^2 + y^2 \le 8y \\ x \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

b) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, trong đó $D: x^2 + y^2 \le 1$.

c) $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 12 \\ x^2 + y^2 \ge 2x \\ x^2 + y^2 \ge 2\sqrt{3}y \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$

d) $\iint_D |9x^2 - 4y^2|dxdy$, trong đó $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$

e) $\iint_D (4x^2 - 2y^2)dxdy$, trong đó $D: \begin{cases} 1 \le xy \le 4 \\ x \le y \le 4x \end{cases}$

Ứng dụng của tích phân kép

1. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 4$.

2. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các đường

$$y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ x^2 = y,\ x^2 = 2y.$$

3. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi

$$y = 0,\ y^2 = 4ax,\ x + y = 3a,\ y \le 0,\ (a > 0).$$

4. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi $2x \le x^2 + y^2 \le 4x$, $0 \le y \le x$.

5. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các đường tròn $r \ge 1$; $r \le \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$.

6. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các đường

a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $(a > 0)$. b) $x^3 + y^3 = axy$, $(a > 0)$.

c) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $(a > 0)$.

7. Chứng minh rằng diện tích miền D xác định bởi $x^2 + (\alpha x - y)^2 \le 1$ không đổi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

8. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt

$$3x + y \ge 1,\ 3x + 2y \le 2,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 1 - x - y.$$

9. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 2 + x^2 + y^2$.

10. Tính thể tích của miền giới hạn bởi $0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$, $y \ge x$, $y \le \sqrt{3}x$.

11. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $(a > 0)$.

12. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2x}{a}$, $(a, b > 0)$.

13. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(a > 0)$.

CHƯƠNG 4
Tích phân đường

Tích phân đường loại 1

Tính các tích phân sau:

1. $\int_C (x-y)ds$, C là đường tròn $x^2+y^2=2x$.

2. $\int_C y^2 ds$, C là đường có phương trình $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi, a>0)$.

3. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, C là đường cong $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi, a>0)$.

Tính phân đường loại 2

Tính các tích phân sau:

1. $\int_{AB} (x^2-2xy)dx+(2xy-y^2)dy$, trong đó AB là cung parabol $y=x^2$ từ $A(1;1)$ đến $B(2;4)$.

2. $\int_C (2x-y)dx+xdy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ theo chiều tăng của t, $(0\le t\le 2\pi, a>0)$.

3. $\int_{ABCA} 2(x^2+y^2)dx+x(4y+3)dy$, trong đó $ABCA$ là đường gấp khúc đi qua $A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(0;2)$.

4. $\int_{ABCDA} \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$, trong đó $ABCDA$ là đường gấp khúc đi qua $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$.

5. $\int_C \dfrac{\sqrt[4]{x^2+y^2}dx}{2}+dy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x=t\sin\sqrt{t} \\ y=t\cos\sqrt{t} \end{cases}$ theo chiều tăng của $0\le t\le \pi^2/4$.

6. Tính tích phân sau

$$\int_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$$

bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với C là đường:

a) $x^2+y^2=R^2$. b) $x^2+y^2=2x$. c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $(a,b>0)$.

7. $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} x^2\left(y+\frac{x}{4}\right)dy - y^2\left(x+\frac{y}{4}\right)dx$.

8. $\oint\limits_{OABO} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, trong đó $OABO$ là đường gấp khúc qua $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;2)$.

9. $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy+e^x\sin x+x+y)dx-(xy-e^{-y}+x-\sin y)dy$.

10. $\oint\limits_C (xy^4+x^2+y\cos(xy))dx+(\frac{x^3}{3}+xy^2-x+x\cos(xy))dy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ $(a>0)$.

11. Dùng tích phân đường loại 2 tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp xycloit: $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ và trục Ox, $(a>0)$.

12. $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

13. $\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;2\pi)} (1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$.

14. Tìm hằng số α để tích phân sau không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định

$$\int\limits_{AB} \frac{(1-y^2)dx+(1-x^2)dy}{(1+xy)^\alpha}.$$

15. Tìm các hằng số a, b để biểu thức

$$(y^2+axy+y\sin(xy))dx+(x^2+bxy+x\sin(xy))dy$$

là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Hãy tìm hàm số $u(x,y)$ đó.

16. Tìm hàm số $h(x)$ để tích phân

$$\int\limits_{AB} h(x)[(1+xy)dx+(xy+x^2)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(x)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(1;1)$ đến $B(2;3)$.

17. Tìm hàm số $h(y)$ để tích phân

$$\int\limits_{AB} h(y)[y(2x+y^3)dx-x(2x-y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(y)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(0;1)$ đến $B(-3;2)$.

18. Tìm hàm số $h(xy)$ để tích phân

$$\int_{AB} h(xy)[(y+x^3y^2)dx+(x+x^2y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(xy)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(1;1)$ đến $B(2;3)$.

CHƯƠNG 5
Lý thuyết trường

1. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ của hàm $u=x^3+2y^3-3z^3$ tại điểm $A(2;0;1)$ với $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, $B(1;2;-1)$.

2. Tính môđun của $\overrightarrow{grad}\,u$, với

$$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

tại $A(2;1;1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{grad}\,u$ vuông góc với Oz, khi nào thì $\overrightarrow{grad}\,u=0$?

3. Tính $\overrightarrow{grad}\,u$, với

$$u=r^2+\frac{1}{r}+\ln r,\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

4. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u=x\sin z-y\cos z$ từ gốc $O(0;0;0)$ là lớn nhất?

5. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{grad}\,z$ của các hàm số $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và $z=x-3y+\sqrt{3xy}$ tại $(3;4)$.

6. Trong các trường sau đây, trường nào là trường thế:

a) $\vec{a}=5(x^2-4xy)\vec{i}+(3x^2-2y)\vec{j}+\vec{k}$.

b) $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

c) $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(z+y)\vec{k}$.

7. Cho $\vec{F}=xz^2\vec{i}+yx^2\vec{j}+zy^2\vec{k}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt cầu S: $x^2+y^2+z^2=1$, hướng ra ngoài.

8. Cho $\vec{F}=x(y+z)\vec{i}+y(z+x)\vec{j}+z(x+y)\vec{k}$, L là giao tuyến của mặt trụ $x^2+y^2+y=0$ và nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=2$, $z\ge 0$. Chứng minh rằng lưu số của $\vec{F}$ dọc theo L bằng 0.