

**ĐỀ CƯƠNG BÀI TẬP GIẢI TÍCH I - TỪ K62****Nhóm ngành 1****Mã số : MI 1111**

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3: Tự luận, 60 phút.

Nội dung: Chương 1, chương 2 đến hết tích phân bất định của các hàm phân thức hữu tỉ.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7: Tự luận, 90 phút.

**Chương 1****Phép tính vi phân hàm một biến số****1.1-1.4. Dãy số, hàm số**

1. Tìm tập xác định của các hàm số

a)  $y = \sqrt{\operatorname{arccot} x - 5\pi}$

c)  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

b)  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

d)  $y = \arccos(\sin x)$ .

2. Chứng minh các đẳng thức sau

a)  $\sinh(-x) = -\sinh x$ ,

b)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ,

c)  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ ,

d)  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ ,

e)  $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$ ,

f)  $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ .

3. Tìm miền giá trị của hàm số

a)  $y = \lg(1 - 2 \cos x)$

c)  $y = \arctan(\sin x)$

b)  $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$

d)  $y = \arctan(e^x)$ .

4. Một quả bóng có đường kính  $d$  m. Tìm hàm theo  $d$  biểu diễn thể tích không khí cần bơm vào quả bóng để quả bóng có đường kính  $d + 1$ . Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm.

5. Tìm  $f(x)$  biết

a)  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b)  $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$ .

6. Một máy bay, bay với vận tốc 600 km/h, ở độ cao 2 km, bay qua ngay phía trên trạm kiểm soát không lưu ở thời điểm  $t = 0$ .

a) Biểu diễn hàm khoảng cách  $d$  (tính theo m) theo phương ngang của máy bay tới trạm kiểm soát không lưu theo thời gian  $t$  (tính theo phút).

b) Biểu diễn hàm khoảng cách  $s$  giữa máy bay và trạm kiểm soát không lưu theo  $d$ .

c) Sử dụng hàm hợp, tìm biểu diễn hàm của  $s$  theo  $t$ .

7. Tìm hàm ngược của hàm số

a)  $y = 2 \arcsin x$

b)  $y = \frac{1-x}{1+x}$

c)  $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ .

8. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a)  $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$

c)  $f(x) = \sin x + \cos x$

b)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

d)  $f(x) = \arcsin(\tan x)$ .

9. Chứng minh rằng bất kỳ hàm số  $f(x)$  nào xác định trong một khoảng đối xứng  $(-a, a)$ , ( $a > 0$ ) cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ.

10. Cho  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai hàm xác định trên miền đối xứng. Chứng minh:

a) Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là hàm chẵn thì tổng và tích của chúng là hàm chẵn.

b) Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là hàm lẻ thì tổng của chúng là hàm lẻ và tích của chúng là hàm chẵn.

c) Nếu  $f(x)$  là hàm lẻ và  $g(x)$  là hàm chẵn thì tích của chúng là hàm lẻ.

11. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của hàm số sau (nếu có)

a)  $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$       c)  $f(x) = \cos^2 x$

b)  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$       d)  $f(x) = \sin(x^2)$

12. Tìm giới hạn của những dãy số (nếu hội tụ) với số hạng tổng quát  $x_n$  như sau

a)  $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

d)  $x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$

b)  $x_n = n \cos n\pi$

e)  $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n}$

c)  $x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

f)  $x_n = \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1}$

13. Tìm giới hạn của những dãy số với số hạng tổng quát  $x_n$  như sau

a)  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

b)  $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2-(n-1)^2}}$

c)  $x_n = \frac{1}{\sqrt{3n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2}}$

14. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy với số hạng tổng quát  $x_n$  như sau

a)  $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$  ( $n$  dấu căn)

b)  $x_n = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots + \frac{1}{2}}}$  ( $n$  phép chia)

c)  $x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right)$

### 1.5-1.6. Giới hạn hàm số

15. Tìm giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \sqrt{1+x} - \frac{1}{x} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x \right)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\ln(1+3x)}$

16. Tìm giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \arccos^3 x) - \ln x}{x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$ .

17. Tìm giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x} \right), x > 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4 \sin x)}{3^x - 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2) \ln(x+2) - 2(x+1) \ln(x+1) + x \ln x]$ .

18. So sánh các cặp VCB sau:

a)  $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$  và  $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$ , khi  $x \rightarrow 0^+$ .

b)  $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$  và  $\beta(x) = \cos x - 1$ , khi  $x \rightarrow 0^+$ .

c)  $\alpha(x) = x^3 + \sin^2 x$  và  $\beta(x) = 1 - \cos x$ , khi  $x \rightarrow 0$ .

### 1.7. Hàm số liên tục

19. Tìm  $a$  để hàm số liên tục tại  $x = 0$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

20. Hàm  $f(x)$  sau liên tục tại những giá trị  $x$  nào?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ,} \\ 1, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ,} \\ x, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases}$$

21. Điểm  $x = 0$  là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

$$\text{a) } y = \frac{8}{1 - 2\cot x}$$

$$\text{c) } y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{x} \arcsin x$$

$$\text{d) } y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, (a \neq b)$$

22. Các hàm số sau đây có liên tục đều trên miền đã cho không?

$$\text{a) } y = \frac{x}{4-x^2}; -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{b) } y = \ln x; 0 < x < 1$$

### 1.8. Đạo hàm và vi phân

$$\text{23. Tìm đạo hàm của hàm số } f(x), \text{ biết } f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{nếu } x < 1, \\ (1 - x)(2 - x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

24. Tính  $f'(x)$  biết  $f'(2017x) = x^2$ .

25. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

a) Liên tục tại  $x = 0$

c) Có đạo hàm liên tục tại  $x = 0$ .

b) Khả vi tại  $x = 0$

26. Trong năm 2016, GDP (tổng thu nhập quốc dân) của Việt Nam theo đầu người là 6.421 USD, dân số (ước tính) 95.414.640, tốc độ tăng trưởng GDP 6,2%, tốc độ tăng dân số 1,1%. Xác định GDP và tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam trong năm 2016.

27. Một thang cao 5m dựa vào một bức tường thẳng đứng, chân thang cách tường 3m. Nếu chân thang trượt ra xa khỏi tường với tốc độ 1 m/s thì đỉnh thang trượt với tốc độ bao nhiêu?

28. Chứng minh rằng hàm số  $f(x) = |x - a|\varphi(x)$ , trong đó  $\varphi(x)$  là một hàm số liên tục và  $\varphi(a) \neq 0$ , không khả vi tại điểm  $x = a$ .

29. Tìm vi phân của hàm số

a)  $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

c)  $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|, (a \neq 0)$

b)  $y = \arcsin \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

d)  $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$

30. Tìm

a)  $\frac{d}{d(x^2)} \left( \frac{\sin x}{x} \right)$

b)  $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

c)  $\frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9).$

31. Tính gần đúng giá trị của biểu thức

a)  $\sqrt[3]{7,97}$

b)  $\sqrt[7]{\frac{2 - 0.02}{2 + 0.02}}$

c)  $\sqrt{3e^{0,04} + 1,02^2}$

32. Đường kính của một quả cầu là 84cm với sai số không quá 0,5 cm.

a) Xác định sai số có thể của diện tích bề mặt.

b) Xác định sai số có thể của thể tích quả cầu.

c) Nếu sơn bề mặt quả cầu bởi một lớp sơn với bề dày 0.05 cm, xác định thể tích sơn cần dùng (theo  $\text{cm}^3$ ).

33. Cho hàm số  $f(x)$ , biết rằng đường tiếp tuyến với đồ thị của  $f(x)$  tại điểm (4,3) đi qua điểm (0,2), tính  $f(4)$  và  $f'(4)$ .

34. Xét phản ứng hóa học:  $\text{NaOH} + \text{HCl} = \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$  trong dung dịch. Ban đầu, nồng độ NaOH và HCl có giá trị  $a$  mol/l. Khi đó nồng độ chất NaCl sẽ có giá trị:  $x = \frac{a^2kt}{akt+1}$ , với  $k$  là hằng số.

a) Xác định tốc độ phản ứng (số mol NaCl tạo thành trong một đơn vị thời gian) theo thời gian  $t$ .

b) Chứng minh rằng  $x'(t) = k(a - x)^2$ .

35. Phương trình chất khí lý tưởng có dạng  $pV = nRT$  với  $T$  là nhiệt độ tuyệt đối (K),  $p$  là áp suất (atm),  $V$  là thể tích (l) và  $R$  là hằng số chất khí ( $0,0821 \text{l.atm.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ). Tại một thời điểm nào đó, áp suất  $p = 8 \text{atm}$  và tăng với vận tốc 0,1 atm/phút, thể tích  $V = 10 \text{l}$  và giảm với vận tốc 0,15 l/phút. Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ của chất khí tại thời điểm nói trên biết rằng số mol khí  $n = 10$ .

36. Nếu  $C(x)$  là chi phí sản xuất của  $x$  đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là  $C'(x)$  cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm

$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3.$$

Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại  $x = 100$ , giá trị đó nói lên điều gì?

37. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a)  $y = \frac{x^2}{1-x}$ , tính  $y^{(8)}$

c)  $y = \frac{x^2}{1-x}$ , tính  $y^{(8)}$

b)  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ , tính  $y^{(100)}$

d)  $y = x^2 \sin x$ , tính  $y^{(50)}$ .

38. Tính đạo hàm cấp  $n$  của hàm số

a)  $y = \frac{x}{x^2-1}$

c)  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

e)  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

b)  $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$

d)  $y = e^{ax} \sin(bx+c)$ .

f)  $y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$

39. Tính vi phân cấp cao của các hàm số

a)  $y = (2x+1) \sin x$ . Tính  $d^{10}y(0)$ .

c)  $y = x^9 \ln x$ . Tính  $d^{10}y(1)$ .

b)  $y = e^x \cos x$ . Tính  $d^{20}y(0)$

d)  $y = x^2 e^{ax}$ . Tính  $d^{20}y(0)$

40. Trong hệ sinh thái, mô hình thú săn mồi - con mồi thường được sử dụng để tìm hiểu sự tương tác giữa các loài. Xét số lượng của sói rừng và hươu theo thời gian  $W(t)$  và  $C(t)$ . Sự tương tác được mô tả theo các phương trình:

$$C'(t) = aC(t) - bC(t)W(t) \quad W'(t) = -cW(t) + dC(t)W(t),$$

với  $a, b, c, d$  là các hằng số.

a) Với các giá trị nào của  $C(t)$  và  $W(t)$  thì hệ ổn định (số lượng sói và hươu không đổi).

b) Với điều kiện nào thì một trong hai loài tuyệt chủng.



c) Với điều kiện nào thì cả hai loài sẽ tuyệt chủng.

41. Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác.

Số lượng cá trong hồ  $P$  được mô tả bởi phương trình:

$$P'(t) = r_0 \left( 1 - \frac{P(t)}{P_c} \right) P(t) - \beta P(t)$$

với  $r_0$  là tỉ lệ sinh sản,  $P_c$  là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì,  $\beta$  là tỉ lệ khai thác. Cho  $P_c = 10000$ , tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

### 1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

42. Chứng minh rằng  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ , phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng  $(0, \pi)$ .

43. Chứng minh rằng phương trình  $x^n + px + q = 0$  với  $n$  nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực nếu  $n$  chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu  $n$  lẻ.

44. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$  không áp dụng được đối với các hàm số  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

45. Chứng minh bất đẳng thức

a)  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

b)  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a$

c)  $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$ .

46. Tồn tại hay không hàm  $f$  sao cho  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 4$  và  $f'(x) \leq 2$  với mọi  $x$ ?

47. Một chiếc xe đi từ Hà Nội về Hải Phòng trên đường cao tốc. Lúc 2h, xe ở cách Hà Nội 30km, lúc 2h10, cách 50km. Chứng minh rằng có một

thời điểm trong khoảng thời gian từ 2h - 2h10, xe có tốc độ chính xác là 120km/h.

48. Hai người chạy đua xuất phát cùng lúc và về đích cùng lúc. Chứng minh rằng trong khoảng thời gian chạy, có một thời điểm hai người chạy cùng một vận tốc.

49. Tìm giới hạn

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2 - x) \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}. \end{array}$$

50. Xác định  $a, b$  sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi  $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

51. Cho  $f$  là một hàm số thực khả vi trên  $[a, b]$  và có đạo hàm  $f''(x)$  trên  $(a, b)$ . Chứng minh rằng với mọi  $x \in (a, b)$  có thể tìm được ít nhất một điểm  $c \in (a, b)$  sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c).$$

52. Dùng phương pháp Newton, tính  $\sqrt[6]{2}$  đúng đến 8 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

53. Giải thích tại sao phương pháp Newton không áp dụng được để giải phương trình:  $x^3 - 2x + 6 = 0$  với xấp xỉ đầu  $x_1 = 1$ .

54. Một công ty bất động sản bán căn hộ chung cư trả góp với mức giá 1 tỷ 800 triệu hoặc trả góp với mức trả hàng tháng 37,5 triệu trong 5 năm.

Tính mức lãi suất hàng tháng phải trả bằng phương pháp Newton?

55. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a)  $y = x^4 + x^2 - x + 1$     b)  $y = \arctan x - x$     c)  $y = x + |\sin 2x|$

56. Chứng minh bất đẳng thức

a)  $2x \arctan x \geq \ln(1 + x^2)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$

b)  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$  với mọi  $x \geq 0$ .

57. Tìm cực trị của hàm số

a)  $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

c)  $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

b)  $y = x - \ln(1 + x)$

d)  $y = x^{\frac{2}{3}} + (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ .

58. Một thùng chứa 5000 lít nước, dưới đáy có lỗ xả. Theo định luật Torricelli, thể tích nước  $V$  còn lại trong bình sau  $t$  phút có công thức:  
 $V = 5000 \left(1 - \frac{1}{40}t\right)^2$ .

a) Xác định tốc độ nước chảy ra ở thời điểm  $t = 20$  phút.

b) Xác định thời điểm tốc độ nước chảy ra là nhanh nhất, chậm nhất.

59. Tần số dao động của sợi dây đàn ghi ta cho bởi công thức  $f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , với  $L$  là chiều dài,  $T$  là sức căng và  $\rho$  là khối lượng riêng (theo chiều dài) của dây.

a) Xác định sự tốc độ thay đổi về tần số của dây theo chiều dài, sức căng, và khối lượng riêng tương ứng khi các tham số còn lại xem là hằng số. Cao độ của nốt nhạc phụ thuộc vào tần số dao động của dây (tần số càng cao thì nốt nhạc càng cao). Cao độ của nốt nhạc thay thế nào nếu:

- b) Giảm chiều dài của dây bằng cách bấm lên phím đàn.
- c) Tăng sức căng của dây bằng cách căng thêm dây.
- d) Đổi qua dây khác có khối lượng riêng cao hơn.

60. Trong khoảng từ  $0^\circ$  đến  $30^\circ$ , thể tích (theo  $m^3$ ) của một 1kg nước ở nhiệt độ  $T$  theo công thức

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Xác định nhiệt độ, tại đó khối lượng riêng của nước là lớn nhất.

61. Một nhà bán lẻ bán 1200 TV một tuần ở mức giá 35 triệu. Một nghiên cứu thị trường chỉ ra, cứ giảm giá 1 triệu thì lượng bán sẽ tăng lên 80 chiếc một tuần. Giá thành sản xuất trong tuần là  $x$  chiếc TV là:  $C(x) = 350 + 12x$  (triệu).

- a) Tìm hàm đơn giá và hàm doanh thu (theo lượng bán).
- b) Cửa hàng nên bán ở mức giá bao nhiêu để cực đại doanh thu?
- c) Tìm giá bán để cực đại lợi nhuận.

62. Một hòn đá được ném thẳng lên từ bề mặt Sao Hỏa. Độ cao (m) so với bề mặt của hòn đá tại thời điểm  $t$  được cho bởi công thức  $H = 15t - 1,86t^2$ .

- a) Tìm vận tốc của hòn đá tại thời điểm  $t = 10$ .
- b) Xác định gia tốc trọng trường trên bề mặt của Sao Hỏa.
- c) Tìm vận tốc của hòn đá khi nó ở độ cao 25m trên đường đi lên và trên đường đi xuống.
- d) Tìm độ cao lớn nhất của hòn đá.
- e) Khi nào thì hòn đá chạm bề mặt?

f) Xác định vận tốc của hòn đá khi chạm bề mặt.

63. Cho  $f(x)$  là hàm lồi trên đoạn  $[a, b]$ , chứng minh rằng  $\forall c \in (a, b)$ , ta có:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

64. Cho  $x, y > 0$ , chứng minh các bất đẳng thức sau:

a)  $\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}}$

b)  $x \ln x + y \ln y \geq (x + y) \ln \frac{x+y}{2}$

### 1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

65. Tìm tiệm cận của các đường cong sau

a)  $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$

d)  $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = \frac{2016t^2}{1 - t^3} \end{cases}$

b)  $y = \ln(1 + e^{-x})$

e)  $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \arctan t \end{cases}$

c)  $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1 + x^2}$

### 1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

66. Khảo sát hàm số

a)  $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$

e)  $\begin{cases} x = \frac{2t}{1 - t^2} \\ y = \frac{t^2}{1 + t} \end{cases}$

b)  $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

f)  $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

c)  $y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$

g)  $r = a + b \cos \varphi, (0 < a \leq b)$

d)  $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

h)  $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, (a > 0).$

67. Theo thuyết tương đối, khối lượng và năng lượng của một hạt được xác định theo công thức tương ứng:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad E = \sqrt{m_0^2 c^4 + \frac{h^2 c^2}{\lambda^2}},$$

với  $m_0$  là khối lượng nghỉ,  $\lambda$  là bước sóng de Broigle tương ứng với chuyển động của hạt,  $h$  là hằng số Planck,  $v$  là vận tốc tương đối của hạt đối với người quan sát,  $c$  là vận tốc ánh sáng.

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm  $m$  phụ thuộc vào  $v$ , nêu nhận xét.
- b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm  $E$  phụ thuộc vào  $\lambda$ , nêu nhận xét.

## Chương 2

### Phép tính tích phân hàm một biến số

#### 2.1 Tích phân bất định

1. Tính các tích phân

a)  $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$

e)  $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+5)}$

b)  $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

f)  $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

c)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

g)  $\int \sin x \sin(x+y) dx$

d)  $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}$

h)  $\int \frac{1+\sin x}{\sin^2 x} dx.$

2. Tính các tích phân

a)  $\int \arctan x dx$

e)  $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$

b)  $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx$

f)  $\int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx$

c)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

g)  $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

d)  $\int x\sqrt{-x^2+3x-2} dx$

h)  $\int \arcsin^2 x dx.$

3. Lập công thức truy hồi tính  $I_n$

a)  $I_n = \int x^n e^x dx$

b)  $I_n = \int \sin^n x dx$

c)  $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}.$

#### 2.2. Tích phân xác định

4. Tính các đạo hàm

a)  $\frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt$

b)  $\frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt$

c)  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$

5. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \dots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$

6. Tính các giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

7. Tính các tích phân sau

a)  $\int_{1/e}^e |\ln x| (x+1) dx$       c)  $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$       e)  $\int_0^{\pi/4} \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$   
 b)  $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$       d)  $\int_0^3 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx$       f)  $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx.$

8. Chứng minh rằng nếu  $f(x)$  liên tục trên  $[0, 1]$  thì

a)  $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$       b)  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx.$

Áp dụng tính các tích phân sau

c)  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$       d)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}}$       e)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$

9. Cho  $f(x), g(x)$  là hai hàm số khả tích trên  $[a, b]$ . Giả sử,  $f^2(x), g^2(x)$  và  $f(x).g(x)$  khả tích trên  $[a, b]$ , chứng minh bất đẳng thức (với  $a < b$ ):

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)$$



(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

### 2.3. Tích phân suy rộng

10. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

a)  $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$

c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

b)  $\int_0^{+\infty} \cos x dx$

d)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ .

11. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a)  $\int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$

c)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$

e)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

b)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$

d)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x}$

f)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ .

12. Nếu  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  hội tụ thì có suy ra được  $f(x) \rightarrow 0$  khi  $x \rightarrow +\infty$  không?

Xét ví dụ  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ .

13. Cho hàm  $f(x)$  liên tục trên  $[a, +\infty)$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$ . Hỏi

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$  có hội tụ không.

### 2.4. Ứng dụng của tích phân xác định

14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Đường parabol  $y = x^2 + 4$  và đường thẳng  $x - y + 4 = 0$

b) Parabol bậc ba  $y = x^3$  và các đường  $y = x, y = 2x, (x \geq 0)$

c) Đường tròn  $x^2 + y^2 = 2x$  và parabol  $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

d) Đường  $y^2 = x^2 - x^4$ .

15. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ  $x^2 + y^2 \leq a^2$  và  $y^2 + z^2 \leq a^2, (a > 0)$ .

16. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt paraboloid  $z = 4 - y^2$ , các mặt phẳng tọa độ  $x = 0, z = 0$  và mặt phẳng  $x = a$  ( $a \neq 0$ ).

17. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường  $y = 2x - x^2$  và  $y = 0$

a) Quay quanh trục  $Ox$  một vòng

b) Quay quanh trục  $Oy$  một vòng.

18. Tính độ dài đường cong

a)  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  khi  $x$  biến thiên từ 1 đến 2.

b) 
$$\begin{cases} x = a \left( \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \\ y = a \sin t \end{cases}$$
 khi  $t$  biến thiên từ  $\frac{\pi}{3}$  đến  $\frac{\pi}{2}$  ( $a > 0$ ).

19. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a)  $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  quay quanh trục  $Ox$

b)  $y = \frac{1}{3}(1 - x)^3, 0 \leq x \leq 1$  quay quanh trục  $Ox$ .

20. Một cái thùng nặng 10kg chứa 36kg nước được kéo lên từ mặt đất đến độ cao 12m với vận tốc không đổi bằng một sợi dây nặng 0.8kg/m. Cái thùng bị rò và nước chảy ra ngoài với lượng nước theo thời gian không đổi, và chảy hết nước khi thùng ở độ cao 12m. Tính công tiêu tốn (J), coi gia tốc trọng trường là  $10 (m/s^2)$ .

21. Một bể nước hình cầu đường kính (trong) 24m đặt trên tháp cao 60m. Bể được bơm vào bằng một vòi ở đáy bằng máy bơm 1,5 sức ngựa. Sau bao lâu bể sẽ đầy? (1 sức ngựa tương đương khoảng 745.7 watt).

## Chương 3 Hàm số nhiều biến số

### 3.1. Các khái niệm cơ bản

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

$$\text{a) } z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} \qquad \text{c) } z = \arcsin \frac{y-1}{x}$$

$$\text{b) } z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)} \qquad \text{d) } z = \sqrt{x \sin y}$$

2. Tìm tập giá trị của hàm số

$$\text{a) } z = 1 - 2x^2 - 3y^2$$

$$\text{c) } u = \arcsin x + \arccos y + \arctan z$$

$$\text{b) } z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$\text{d) } z = \operatorname{arccot}(x^2 + y^2 + z^2)$$

3. Tìm các giới hạn nếu có của các hàm số sau

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{d) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

$$\text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \sin \frac{\pi x}{2x + y}$$

$$\text{e) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + 4y^3)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$$

$$\text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\text{f) } \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$$

### 3.2. Đạo hàm riêng và vi phân

4. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

$$\text{a) } z = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{d) } z = x^{y^3}, (x > 0)$$

$$\text{b) } z = y^2 \sin \frac{x}{y}$$

$$\text{e) } u = x^{y^z}, (x, y, z > 0)$$

$$\text{c) } z = \arctan \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

$$\text{f) } u = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{g) } u = x^{\frac{y}{z}}.$$

5. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của hàm số  $f(x, y)$  sau

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} x \arctan \left( \frac{y}{x} \right)^2, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

6. Giả sử  $z = yf(x^2 - y^2)$ , ở đây  $f$  là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số  $z$  hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x} z_x' + \frac{1}{y} z_y' = \frac{z}{y^2}$$

7. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau đây

$$\text{a) } z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{b) } z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y}$$

$$\text{c) } z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3.$$

8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

$$\text{a) } z = \sin(x^2 + y^2)$$

$$\text{c) } z = e^{x^2} \sin^2 y$$

$$\text{e) } u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{b) } z = \ln \tan \frac{y}{x}$$

$$\text{d) } z = \arctan \frac{x + y}{x - y}$$

$$\text{f) } u = x^{y^2} z.$$

9. Tính gần đúng

$$\text{a) } A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$$

$$\text{b) } B = \ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1).$$

10. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a)  $x^3y - y^3x = a^4$ , tính  $y'$

b)  $x + y + z = e^z$ , tính  $z_x', z_y'$

c)  $\arctan \frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$ , tính  $y'$

d)  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ , tính  $z_x', z_y'$ .

11. Cho  $u = \frac{x+z}{y+z}$ , tính  $u_x', u_y'$  biết rằng  $z$  là hàm số ẩn của  $x, y$  xác định bởi phương trình  $ze^z = xe^x + ye^y$ .

12. Tìm đạo hàm của hàm số ẩn  $y(x), z(x)$  xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

13. Phương trình  $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ , xác định hàm ẩn  $z = z(x, y)$ . Chứng minh rằng

$$x^2 z_x' + \frac{1}{y} z_y' = \frac{1}{z}.$$

14. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

a)  $z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$       b)  $z = x^2 \ln(x + y)$       c)  $z = \arctan \frac{y}{x}$ .

15. Cho  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin^2 y}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ , tính  $f''_{xy}(0, 0)$ .

16. Cho  $f$  là hàm khả vi đến cấp hai trên  $\mathbb{R}$ . Chứng minh rằng hàm số  $w(x, t) = f(x - 3t)$  thỏa mãn phương trình truyền sóng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

17. Chứng minh rằng hàm số  $u(x, t) = e^{-16t} \cos(2x + 3)$  thỏa mãn phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

18. Tính các vi phân cấp hai của các hàm số sau

a)  $z = xy^2 - x^2y$       b)  $z = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$       c)  $z = x^y$

19. Tính các vi phân cấp hai sau

a)  $z = \ln(x - y)$ , tính  $d^2z(2, 1)$       b)  $z = y^{x^3}$ , tính  $d^2z(1, 1)$ .

### 3.3. Cực trị của hàm số nhiều biến số

20. Tìm cực trị của các hàm số sau

a)  $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$       c)  $z = x^2 + y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$   
 b)  $z = x + y - xe^y$       d)  $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ .

21. Tìm cực trị có điều kiện

a)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  với điều kiện  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$   
 b)  $z = xy$  với điều kiện  $x + y = 1$ .

22. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a)  $z = x^2y(4 - x - y)$  trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 0, y = 0, x + y = 6$   
 b)  $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$  trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$ .

23. Chỉ số Shannon đo lường mức độ đa dạng của một hệ sinh thái. Trong trường hợp ba loài, được xác định theo công thức:

$$H = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3$$

với  $p_i$  là tỉ lệ số lượng loài  $i$  trong quần thể ( $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ). Tìm giá trị lớn nhất của  $H$ .