

# BÀI 4

---

**HANG MA TRAN**

# §4: Hạng ma trận

## 4.1. Định nghĩa.

- Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$  và một số  $k \leq \min\{m, n\}$ . Ma trận con cấp  $k$  của  $A$  là ma trận có được từ ma trận  $A$  bằng cách bỏ đi  $(m-k)$  hàng và  $(n-k)$  cột. Định thức của ma trận con cấp  $k$  của  $A$  gọi là định thức con cấp  $k$  của  $A$ .

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{123}^{234} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^{12} =$$

$$A_{12}^{24} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

## §4: Hạng ma trận

-Đ/n: *Hạng của ma trận  $A$*  là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 có trong  $A$ .

Kí hiệu:  $\text{rank}(A)$  hoặc  $r(A)$

**Nhận xét.** Nếu đã biết  $r(A) = k$  thì ta biết  $A$  có ít nhất một định thức con cấp  $k$  khác không và mọi định thức con cấp lớn hơn  $k$  của  $A$  đều bằng không và ngược lại

## §4: Hạng ma trận

Tính chất:

+) Ma trận không có hạng bằng 0.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1^2 = [0]$$

$$A_{13}^{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## §4: Hạng ma trận

+) Nếu  $A$  là ma trận cấp  $m \times n$  thì  
 $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$ .

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$$

## §4: Hạng ma trận

- +) Nếu ma trận  $A$  vuông cấp  $n$  có  
 $\det(A) \neq 0$  thì  $r(A) = n$  và  
 $\det(A) = 0$  thì  $r(A) < n$ .

**Ví dụ:**

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}$$

$A$  có duy nhất 1 định thức con cấp 3 và đó là định thức con có cấp lớn nhất



## §4: Hạng ma trận

**Định nghĩa 1.4.3.** Cho  $A$  ma trận vuông cấp  $n$  trên  $\mathbb{R}$ .  $A$  được gọi là *ma trận không suy biến* nếu  $r(A) = n$ . Ngược lại, nếu  $r(A) < n$  thì  $A$  gọi là *ma trận suy biến*.

## §4: Hạng ma trận

**Mệnh đề 1.4.1.** Cho  $A$  là một ma trận vuông trên  $\mathbb{R}$ . Các khẳng định sau là tương đương:

- (1)  $A$  khả nghịch
- (2)  $\det(A) \neq 0$
- (3)  $A$  không suy biến





## §4: Hạng ma trận

**Định lý 1.4.2.** *Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị.*

Điều này suy ra từ tính chất:

$$\det(A) = \det(A^T).$$



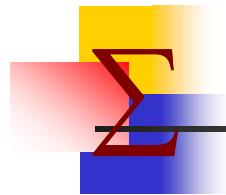
# §4: Hạng ma trận

## 4.2. Tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

- a. **Ma trận bậc thang** (ma trận hình thang) là ma trận thỏa mãn hai tính chất:
- (i) Các hàng khác không nằm trên các hàng không (hàng có tất cả các phần tử là 0)
  - (ii) Với 2 hàng khác không, phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên đứng trước phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# §4: Hạng ma trận

**b. Định lí:** *Nếu A là ma trận bậc thang thì hạng của A bằng số hàng khác không của nó.*

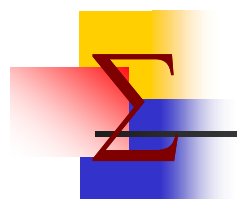
Ví dụ:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$$



# §4: Hạng ma trận



Chứng minh định lý:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12..r}^{12..r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

Các MT con cấp  $> r$   
 chứa ít nhất 1 hàng = 0

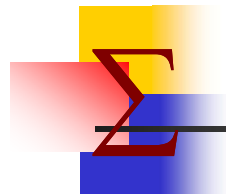
## §4: Hạng ma trận

**Chú ý:**

“Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận”

$A \xrightarrow{\quad} B$  (ma trận bậc thang)

Vấn đề:  $r(A) \stackrel{?}{=} r(B)$



# §4: Hạng ma trận

**Chú ý:**

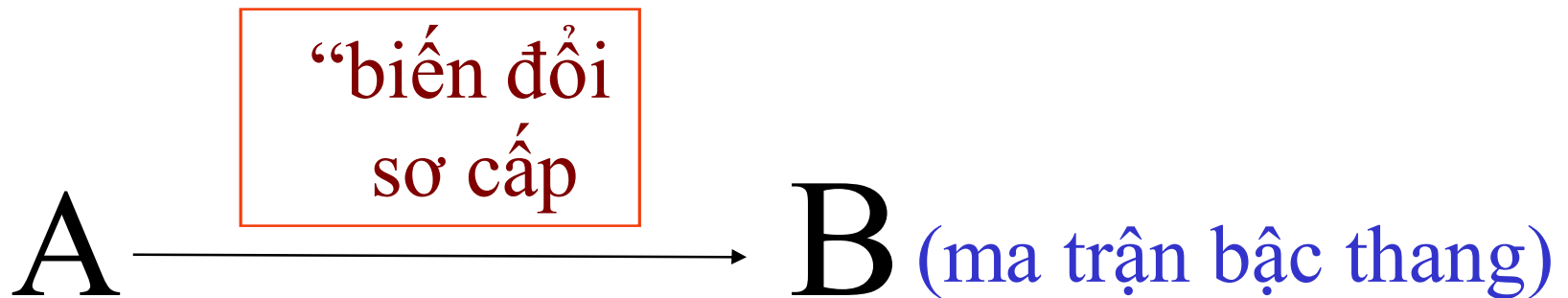
$$A \xrightarrow{\lambda I} B \Rightarrow \text{ch}(B) = \lambda \text{ch}(A)$$

$$A \xrightarrow{I + I} B \Rightarrow \text{ch}(B) = \text{ch}(A)$$

$$A \xrightarrow{I + \lambda I} B \Rightarrow \text{ch}(B) = \text{ch}(A)$$

**Định lý:** Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.

## §4: Hạng ma trận



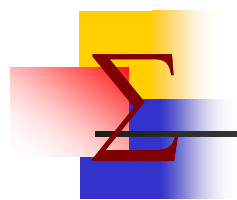
$$r(A) = r(B)$$



## §4: Hạng ma trận

Để tìm hạng của một ma trận  $A$  tùy ý khác không cấp  $m \times n$  trên  $\mathbb{R}$ , ( $m, n \geq 2$ ), ta dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận  $A$  về ma trận hình thang  $B$ . Lúc đó hạng của ma trận  $A$  bằng số hàng khác không của ma trận  $B$ .





## §4: Hạng ma trận

**Ví dụ:** Tìm hạng ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$



## §4: Hạng ma trận

- Ví dụ: Tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

# §4: Hạng ma trận

■ Lời giải.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} h_2 + (-2)h_1 \\ h_3 + 4h_1 \\ h_4 + 1h_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$



# §4: Hạng ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} h_2 + (-2)h_1 \\ h_3 + 4h_1 \\ h_4 + 1h_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} h_3 + 9h_2 \\ h_4 + 8h_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4 + (-1)h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 3$

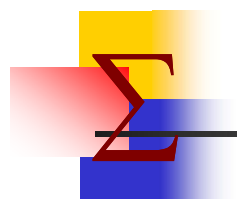
## §4: Hạng ma trận

- **Ví dụ:** Biện luận theo  $m$  hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m = 0 \rightarrow r(A) = 2$$

$$m \neq 0 \rightarrow r(A) = 3$$



## §4: Hạng ma trận

- **Ví dụ:** Biện luận theo  $m$  hạng của ma trận

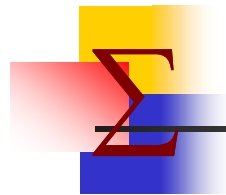
sau:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m = 1 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$$

$$m = -1 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3$$

$$m \neq \pm 1 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3$$



# §4: Hạng ma trận

- **Bài tập:** Biện luận theo m hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & m & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{h_2 \leftrightarrow h_3 \\ c_2 \leftrightarrow c_3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & m \end{bmatrix}$$

## §4: Hạng ma trận

$$\rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3m - 42 \end{bmatrix}$$

$$3m - 42 = 0 \Leftrightarrow m = 14 \rightarrow r(A) = 2$$

$$3m - 42 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 14 \rightarrow r(A) = 3$$



## §4: Hạng ma trận

- **Bài tập:** Biện luận theo  $a, b$  hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & a & b \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$