BÀI 4

HẠNG MA TRẬN

§4: Hạng ma trận

4.1. Định nghĩa.

- Cho A là một ma trận cỡ mxn và một số $k \le \min\{m,n\}$. Ma trận con cấp k của A là ma trận có được từ ma trận A bằng cách bỏ đi (m-k) hàng và (n-k) cột. Định thức của ma trận con cấp k của A gọi là định thức con cấp k của A.

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^{12} =$$

$$A_{12}^{24} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_{123}^{234} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

-Đ/n: *Hạng của ma trận A* là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 có trong A.

Kí hiệu: rank(A) hoặc r(A)

Nhận xét. Nếu đã biết $r(A) = k$ thì ta biết A có ít nhất một định thức con cấp k khác không và mọi định thức con cấp lớn hơn k của A đều bằng không và ngược lại

§4: Hạng ma trận

Tính chất:

+) Ma trận không có hạng bằng 0.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1^2 = [0]$$

$$A_{13}^{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

+) Nếu A là ma trận cấp $m \times n$ thì

$$0 \leq r(A) \leq \min(m, n).$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ & & & \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

+) Nếu ma trận A vuông cấp n có $\det(A) \neq 0$ thì $r(A) = n$ và $\det(A) = 0$ thì $r(A) < n$.

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}$$

A có duy nhất 1 định thức con cấp 3 và đó là định thức con có cấp lớn nhất

§4: Hạng ma trận

Định nghĩa 1.4.3. Cho A ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$. A được gọi là *ma trận không suy biến* nếu $r(A) = n$. Ngược lại, nếu $r(A) < n$ thì A gọi là *ma trận suy biến.*

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

Mệnh đề 1.4.1. *Cho* $\mathbf{A}$ *là một ma trận vuông trên* $\mathbb{R}$. *Các khẳng định sau là tương đương:*

(1) $\mathbf{A}$ *khả nghịch*

(2) $det(\mathbf{A}) \neq 0$

(3) A không suy biến

§4: Hạng ma trận

Định lý 1.4.2. *Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị.*

Điều này suy ra từ tính chất:

$$\det(A) = \det(A^T).$$

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

4.2. Tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

a. **Ma trận bậc thang** (ma trận hình thang) là ma trận thỏa mãn hai tính chất:

(i) Các hàng khác không nằm trên các hàng không (hàng có tất cả các phần tử là 0)

(ii) Với 2 hàng khác không, phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên đứng trước phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

b. Định lí: *Nếu A là ma trận bậc thang thì hạng của A bằng số hàng khác không của nó.*

Ví dụ:

$$rank\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$rank\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

<u>*Chứng minh định lí:*</u>

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12..r}^{12..r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2r} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & a_{rr} \end{bmatrix}$$

Các MT con cấp > r chứa ít nhất 1 hàng = 0

§4: Hạng ma trận

Chú ý: "Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận"

$$A \longrightarrow B$$ (ma trận bậc thang)

<u>Vấn đề:</u> $r(A) \overset{?}{=} r(B)$

§4: Hạng ma trận

Chú ý:

$$A \xrightarrow{\lambda h_i} B \Rightarrow \det(B) = \lambda \det(A).$$

$$A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A).$$

$$A \xrightarrow{h_i + \lambda h_j} B \Rightarrow \det(B) = \det(A).$$

Định lý: *Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.*

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

$$A \xrightarrow{\text{"biến đổi sơ cấp}} B$$ (ma trận bậc thang)

$$\boxed{r(A) = r(B)}$$

§4: Hạng ma trận

Để tìm hạng của một ma trận A tuỳ ý khác không cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$, $(m, n \geq 2)$, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận A về ma trận hình thang B. Lúc đó hạng của ma trận A bằng số hàng khác không của ma trận B.

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

Ví dụ: Tìm hạng ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

§4: Hạng ma trận

- **Ví dụ:** Tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

- **Lời giải.**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 3\\ -4 & 5 & 2 & -1\\ -1 & 7 & 3 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{h_3+4h_1\\ h_4+1h_1}]{h_2+(-2)h_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -5 & 3\\ 0 & 9 & 10 & -1\\ 0 & 8 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3+4h_1 \\ h_4+1h_1}]{h_2+(-2)h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4+8h_2]{h_3+9h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4+(-1)h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A) = 3$$

§4: Hạng ma trận

- **Ví dụ:** Biện luận theo m hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m = 0 \rightarrow \mathrm{r(A)} = 2$$

$$m \neq 0 \rightarrow \mathrm{r(A)} = 3$$

§4: Hạng ma trận

- **Ví dụ:** Biện luận theo m hạng của ma trận sau:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m = 1 \quad \Rightarrow r(A) = 2$$

$$m = -1 \quad \Rightarrow r(A) = 3$$

$$m \neq \pm 1 \quad \Rightarrow r(A) = 3$$

§4: Hạng ma trận

- **Bài tập:** Biện luận theo m hạng của ma trận sau:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & m & 1\\ -1 & 4 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{h_2\leftrightarrow h_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 5 & 4\\ 2 & 1 & m\end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

$$\to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3m-42 \end{bmatrix}$$

$$3m - 42 = 0 \Leftrightarrow m = 14 \quad \rightarrow r(A) = 2$$

$$3m - 42 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 14 \quad \rightarrow r(A) = 3$$

§4: Hạng ma trận

- **Bài tập:** Biện luận theo a, b hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & a & b \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$