

BÀI TẬP GIẢI TÍCH III (Phương trình vi phân và chuỗi). Nhóm 3: Mã MI1133.

Áp dụng từ 06 -2018

Kiểm tra giữa kì: Tự luận

Kiểm tra cuối kì: Tự luận

I) CHUỖI

1. Tính tổng của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \left(\frac{1}{1+n+n^2} \right)$

2. Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{4n+5}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \left(\frac{1}{n^2} \right)$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{n^2} \right)$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{e} - 1$

f) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{\ln n}$

g) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$

j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$

k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$

l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$

l*) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left[\pi \left(2 + \sqrt{3} \right)^n \right]$

o) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^3}$

p) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

q) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!}$

r) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$

s) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

t) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$

u) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$

v) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

w) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + \sqrt[3]{(-1)^n n^4}}}$

x) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$

y) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$

z) $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$

z') $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \pi \sqrt{n^2 + 1}$

3. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1}^n$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n + 1}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x + (-1)^n}{n}$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$

h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-e}} \ln^n \left(x + \frac{1}{n}\right)$

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$

j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)x^n}{n^2 + 1}$

k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$

l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n x^n$

m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n+3}}{2^n + 1}$

n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

o) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$

p) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$

q) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{n^3}$

r) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin n)x^n$

4. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số trên các tập tương ứng:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(x^2 + 1)^n}, x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n, x \in [-1;1]$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2}, x \in \mathbb{R}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x)x^n, x \in (0;1]$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}, x \in \mathbb{R}$

5. Tính tổng của các chuỗi số, chuỗi hàm số sau:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, x \in (-1;1)$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, x \in (-1;1)$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, x \in (-1;1)$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!!}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right)x^n, x \in (-1;1)$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$

h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n+1}}{n+1}, x \in (-1;1)$

6. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Maclaurin:

$$\text{a) } y = \frac{2x + 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{b) } y = x \sin^2 x$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{e) } y = \ln(1 + x - 2x^2)$$

$$\text{f) } y = \arcsin x$$

7. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Taylor (trong lân cận điểm x_0 tương ứng):

$$\text{a) } y = \frac{1}{2x + 3}, x_0 = 4$$

$$\text{b) } y = \sin \frac{\pi x}{3}, x_0 = 1$$

$$\text{c) } y = \sqrt{x}, x_0 = 4$$

8. Khai triển các hàm số tuần hoàn chu kì 2π sau thành chuỗi Fourier:

$$\text{a) } y = x, x \in [-\pi; \pi]$$

$$\text{b) } y = |x|, x \in [-\pi; \pi]$$

$$\text{c) } y = x^2, x \in [-\pi; \pi]$$

$$\text{d) } y = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$$

$$\text{e) } y = \begin{cases} \pi x - x^2, x \in (0; \pi) \\ x^2 + \pi x, x \in [-\pi; 0] \end{cases}$$

II) PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

9. Giải các phương trình vi phân sau:

$$\text{a) } y' = 1 + x + y + xy$$

$$\text{b) } y' = (x + y)^2$$

$$\text{c) } 2y(x^2 + 4)dy = (y^2 + 1)dx$$

$$\text{d) } y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$$

$$\text{e) } xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$$

$$\text{f) } y' = \frac{x + y - 2}{x - y + 4}$$

$$\text{g) } y' - \frac{4}{x}y = 4x^7$$

$$\text{h) } (x^2 + 1)y' + xy = 1$$

$$\text{i) } (2xy + 3)dy = y^2 dx$$

$$\text{j) } y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4, y(1) = 2$$

$$\text{k) } (x^2 y^2 - x)dy = y dx$$

$$\text{l) } 3xy^2 y' - y^3 = x, y(1) = 3.$$

$$\text{m) } (x^2 + y)dx = (2y - x)dy$$

$$\text{n) } e^y dx = (xe^y - 2y)dy$$

$$\text{o) } (2xy^2 - 3y^3)dx = (3xy^2 - y)dy$$

$$\text{p) } y = xy' + y' - y' \ln y'$$

10. Giải các phương trình vi phân sau:

$$\text{a) } \begin{cases} (1 - x^2)y'' - xy' = 2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (1 + x)y'' + x y'^2 = y', \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

- c) $2yy' = y'^2 + 1$
- e) $y'' - 3y' + 2y = 0$
- g) $y'' - 4y' + 13y = 0$
- i) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
- k) $y'' - y = 4x + 1 e^x$.
- m) $y'' + 2y' + 2y = 8 \cos x - \sin x$.
- o) $y'' + y = 2 \cos x \cos 2x$
- q) $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$
- s) $\frac{y''}{y^3} + \frac{2}{y'} - x + y = e^y \cos y$,
(coi $x = x(y)$)
- d) $y'' - \frac{2xy'}{x^2 + 1} + \frac{2y}{x^2 + 1} = 0, (y_1 = x)$
- f) $y'' - 2y' + y = 0$
- h) $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$
- j) $y'' - 4y' + 3y = (15x + 37)e^{-2x}$
- l) $y'' - 2y' + y = (12x + 4)e^x$
- n) $y'' + 3y' - 4y = 200 \sin^2 x$.
- p) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^3, y(1) = 1, y'(1) = 2$
- r) $(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = -2$ biết nó có hai nghiệm riêng $y_1 = 1, y_2 = x$.
- t) $(x^2 + 1)y'' + 2xy' + \frac{4y}{x^2 + 1} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
- Với phép đổi biến $x = \tan t, (|t| < \frac{\pi}{2})$

11. Giải các hệ phương trình vi phân sau:

a)
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 5z \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x - y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x - y} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

III) PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

12. Sử dụng định nghĩa, tìm trực tiếp biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) $f(t) = t$ b) $f(t) = e^{3t+1}$ c) $f(t) = \sinh(kt)$ d) $f(t) = \sin^2 t$

13. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) $f(t) = \sqrt{t} + 3t$ b) $f(t) = t - 2e^{3t}$ c) $f(t) = 1 + \cosh(5t)$

d) $f(t) = \cos^2(2t)$	e) $f(t) = (t+1)^3$	f) $f(t) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
g) $f(t) = 2\sin 3t \cos 5t$	h) $f(t) = \sinh^2 3t$	i) $f(t) = t^4 e^{\pi t}$
j) $f(t) = e^{-2t} \sin 3t$	k) $f(t) = e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$	l) $f(t) = (t + \sin t)^2$
m) $f(t) = (t - e^{2t})^2$	n) $f(t) = te^{2t} \sin 3t$	o) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$
p) $f(t) = \frac{e^{2t} - 1}{t}$	q) $f(t) = \frac{\sinh t}{t}$	r) $f(t) = \frac{1 - \cos 2t}{t}$

14. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

a) $F(s) = \frac{3}{s^4}$	b) $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^{\frac{5}{2}}}$	c) $F(s) = \frac{3}{s-4}$
d) $F(s) = \frac{5-3s}{s^2+9}$	e) $F(s) = \frac{10s-3}{25-s^2}$	f) $F(s) = \frac{1}{s^2-4}$
g) $F(s) = \frac{1}{s^2-3s}$	h) $F(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$	i) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$
j) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2-1)}$	k) $F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$	l) $F(s) = \frac{3}{2s-4}$
m) $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$	n) $F(s) = \frac{3s+5}{s^2-6s+25}$	o) $F(s) = \frac{1}{s^3-1}$
p) $F(s) = \frac{5-2s}{s^2+7s+10}$	q) $F(s) = \frac{1}{s^3-5s^2}$	r) $F(s) = \frac{1}{s^4+4}$
s) $F(s) = \frac{1}{s^4-16}$	t) $F(s) = \frac{s^2-2s}{s^4+5s^2+4}$	u) $F(s) = \frac{s^2+3}{(s^2+2s+2)^2}$
v) $F(s) = \arctan \frac{1}{s}$	w) $F(s) = \ln \frac{s^2+1}{s^2+4}$	x) $F(s) = \frac{2s}{(s^2-1)^2}$

15. Giải các phương trình, hệ phương trình vi phân sau với các điều kiện ban đầu:

a) $x^{(3)} - x'' - x' + x = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$	b) $x^{(3)} - 6x'' + 11x' - 6x = 0$, $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 2.$
c) $x^{(4)} - 16x = 240\cos t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0.$	d) $x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x^{(3)}(0) = 1.$

$$\text{e) } \begin{cases} x^{(3)} - 2x' - 4x = e^t, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x' + 2y' + x = 0, x(0) = 1, \\ x' - y' + y = 0, y(0) = 3. \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} x'' + 2x - 4y = 0 = 0, \\ y'' - x + 2y = 0, \\ x(0) = y(0) = 0, \\ x'(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x' = 2x + y, x(0) = 2, \\ y' = 6x + 3y, y(0) = 3. \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} x'' + x' + y' + 2x - y = 0, \\ y'' + x' + y' + 4x - 2y = 0, \\ x(0) = y(0) = 1, \\ x'(0) = y'(0) = 3. \end{cases}$$

Nhóm biên soạn đề cương

PGS. TS. Nguyễn Xuân Thảo

TS. Đoàn Công Định

Ngày tháng năm 2018

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG KH&ĐT TOÁN TIN ỨNG DỤNG